جامعة، المجلد 17 العدد 1 (2013/1434)، 36-29

البرهان في صف الرياضيات

علي عثمان

تلخيص

إنّ أهمية البرهان في الرياضيات هي التي جعلت منه موضوعاً دقيقاً ومنطقياً وهي ما أدّت إلى ضرورة وضع منظومة المسلمات. لكن عندما تكون هناك قضايا مكافئة لإحدى المسلمات عندها نعتبر واحدة منها مسلّمة فقط والأخريات نظريات أو صفات مكافئة. فإن موضوع الرياضيات يرتكز على مسلمات مستقلة. أي أنه يرتكز على قضايا أساسية لا يمكن برهانها ولا يمكن استنتاج القضية منها من القضايا الأخرى. في هذا المقال أتناول مسلّمة الاستقراء الرياضي الشهيرة وأربع قضايا متكافئة وتكافئ كل منها مسلمة الاستقراء الرياضي. إذا اعتبرنا واحدة منها مسلمة فيجب اعتبار كل واحدة أخرى نظرية ولا يجوز اعتبارها مسلّمة.

مقدمة

إنّ لمعرفة وفهم المسلّمات التي يرتكز عليها أي موضوع علمي انعكاسات إيجابية على التربية في كل مجتمع إنساني. كما أن معرفة معتقدات الشعوب وفهمها هي التي تجعل الحوار بين الشعوب حواراً منطقياً وموضوعياً يرتكز على احترام الآخر المختلف. فعندما يتم التعرف على السلّم القِيَمي لمجتمع ما يمكن حينها فهم أسباب سلوكياته، ومنطلقات حواراته. ويكون حينها الحوار موضوعياً. إن الذي يبحث ويكتب في أي من المواضيع العلمية عليه أن يكون مطلعا على أسس هذا العلم ومسلّماته ومصطلحاته. وعليه فإن أهمية البرهان في الرياضيات هي التي جعلت منه موضوعاً دقيقاً ومنطقياً، وهي ما أدّت، كذلك، إلى ضرورة وضع منظومة المسلّمات. ولكن عندما توجد قضايا مكافئة لإحدى المسلّمات عندها تُعتبر إحداها فقط مسلّمة، وتُعتبر الأخريات نظريات أو صفات مكافئة. إن موضوع الرياضيات يرتكز على مسلمات مستقلة، أي أنه يرتكز على قضايا أساسية لا يمكن برهانها ولا يمكن استنتاج القضية منها من القضايا الأخرى. وتوجد قضايا مكافئة للمسلّمة، فإن تم إدخالها إلى منظومة المسلّمات أصبحت المنظومة غير مستقلة، وينبغي إخراجها أو إخراج المسلّمة المكافئة لها من هذه المنظومة. في هذا المقال تم تناول مسلّمة الاستقراء الرياضي الشهيرة

وأربع قضايا متكافئة وتكافئ كل منها مسلّمة الاستقراء الريّاضي، وإذا اعتبرت واحدة منها مسلّمة فيجب اعتبار كل واحدة أخرى نظرية ولا يجوز اعتبارها مسلّمة.

نبرهن في هذا المقال تكافؤ الصفات الآتية للأعداد الطبيعية:

أ. بديهية الاستقراء الرياضي: اذا كانت A مجموعة محوية في مجموعة الأعداد الطبيعية N وإذا تحقق الشرطان : 1. $1\in A$ وَ 2. [إذا $k\in A$ فإنّ $k+1\in A$], فإنّ $A=N$.

ب. نظرية الاستقراء الرياضي: اذا كانت $P(n)$ صورة قضية متعلقة بالمتغير الطبيعي n فإذا تحقق الشرطان: 1. $P(1)$ صواب وَ 2. [اذا كان $P(k)$ صواب فإنّ $P(k+1)$ صواب] . فإنّ $P(n)$ صواب لكل n طبيعي.

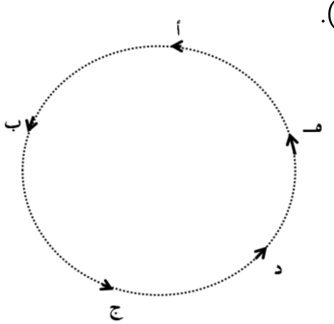
ج. نظرية الاستقراء الموسّع: إذا كانت $P(n)$ صورة قضية متعلقة بالمتغير الطبيعي n فإذا تحقق الشرطان: 1. $P(1)$ صواب وَ 2. [إذا كانت $P(1)\wedge P(2)\wedge P(3)\wedge\ldots\ldots\wedge P(k)$ صواب فإنّ $P(k+1)$ صواب]. فإنّ $P(n)$ صواب لكل n طبيعي. ($\wedge$ = وأيضًا).

د. مبدأ الحدّ الأصغر: لكل مجموعة غير فارغة جزئية للأعداد الطبيعية يوجد حدّ أصغر ما يمكن.

هـ مبدأ الحدّ الأكبر: لكل مجموعة غير فارغة جزئية للأعداد الطبيعية ومحصورة من أعلى يوجد حدّ أكبر ما يمكن.

نص مكافئ: إذا كانت $\varnothing\neq A\subset N$ ويوجد $m\in N$ بحيث أن $x\leq m$ لكل $x\in A$ فإنّه يوجد $x0\in A$ بحيث أن $x\leq x0$ لكل $x\in A$. (x0 هو الحد الأكبر).

مراحل البرهان:



برهنة أ⟵ب: لتكن $P(n)$ صورة قضية تتعلق بالمتغير الطبيعي n، وتحقق الشرطين المذكورين. نرمز $A=\{n \mid P(n)$ صواب وn طبيعي$\}$. حسب الشرط (1) فإنّ $1\in A$. حسب الشرط ب: اذا $P(k)$ صواب فإنّ $P(k+1)$ صواب↔ إذا $k\in A$ فإنّ $k+1\in A$. لذلك $P(n)$ صواب لكل n طبيعي.

برهنة ب⟵ج: لتكن $P(n)$ صورة قضية متعلقة بالمتغير الطبيعي n وتحقق الشرطين المذكورين في ج. نرمز $q(k)=P(1) \wedge P(2) \wedge .... \wedge P(k)$. بما أن $q(1)=P(1)$ وبما أن $P(1)$ صواب فإنّ $q(1)$ صواب.

حسب الشرط: اذا $P(1) \wedge P(2) \wedge .... \wedge P(k)$ صواب فإنّ $P(k+1)$ صواب، نستنتج أن $P(1) \wedge P(2) \wedge .... \wedge P(k) \wedge P(k+1)$ صواب.

أي أن: اذا $q(k)$ صواب فإنّ $q(k+1)$ صواب، لذلك فإن $q(n)$ صواب لكل n طبيعي، لذلك $P(n)$ صواب لكل n طبيعي.

(تذكر: $q(n)$ صواب ↔ $P(1)$ صواب وأيضًا $P(2)$ صواب وأيضًا. . . . . وأيضًا $P(n)$ صواب ↔ $P(k)$ صواب لكل k طبيعي).

برهنة ج⟵ د: لتكن $\emptyset\neq A\subset N$. لكل k طبيعي نُعرّف صورة القضية $P(k)\equiv$: لكل مجموعة جزئية لِ N وحاوية لِ k يوجد حدّ أصغر ما يمكن. واضح أن $P(1)$ صواب. لأنّ كل مجموعة جزئية لـ N وحاوية للعدد 1 حدها الأصغر هو العدد 1.

نفرض أن $P(1) \wedge P(2) \wedge .... \wedge P(k)$ صواب ونبرهن أن $P(k+1)$ صواب. لتكن $M\subset N$ و $k+1\in M$. إذا كان $\{1,2,.....,k\}\cap M=\emptyset$ فإنّ $k+1$ هو الحد الأصغر للمجموعة M (وينتهي الأمر). إذا كان $\{1,2,.....,k\}\cap M\neq\emptyset$ لذلك يوجد $k0$ و $k0\leq k$ و $k0\in M$. بما أن $P(k0)$ صواب لذلك يوجد للمجموعة M حد أصغر ما يمكن. لذلك $P(k+1)$ قضية صواب.

حسب نظرية الاستقراء الموسّع فإنّ $P(n)$ قضية صواب لكل n طبيعي. إذا كانت $ø≠B⊂N$ فيوجد $n0$ طبيعي بحيث أن $n0∈B$، وبما أن $P(n0)$ صواب لذلك يوجد في B حد أصغر ما يمكن.

برهنة د ⟵هـ: لتكن $ø≠A⊂N$ ونفرض أن A محصورة من أعلى، أي أنه يوجد $m0$ طبيعي بحيث أن $x≤m0$ لكل $x∈A$. علينا أن نثبت أن لِـ A يوجد حدّ أكبر ما يمكن.

نُعرف $B=\{j| x∈A$ لكل $x≤j$ و $j∈N\}$ من الواضح أن $B⊂N$ وَ $m0∈B$. لذلك ، حسب مبدأ القيمة الصغرى، يوجد لِـ B حد أصغر ما يمكن نرمز له $k0$. واضح أن $x≤k0$ لكل $x∈A$. إذا كان $k0∉A$ فإنّ $x≤k0-1$ لكل $x∈A$، لذلك فإن $k0-1∈B$. وهذا يتناقض مع كون $k0$ أصغر حدّ في B. فالحالة $k0∉A$ غير ممكنة. لذلك $k0$ هو الحد الأكبر في A.

برهنة هـ ⟵أ: لتكن $A⊂N$ وتحقق شرطي بديهية الاستقراء الرياضي. علينا أن نثبت أن $A=N$. نُعرِّف لكل k طبيعي :

$Bk=\{x|x∉A$ وَ $x≤k$ وَ $x∈N\}$. يكفي أن نبرهن أن $Bk=ø$ لكل k طبيعي. بما أن $1∈A$ فإنّ $B1=ø$ نبرهن بالفرض الخاطئ . نفرض أنه يوجد m طبيعي بحيث أن $Bm≠ø$. بما أن Bm محصورة من أعلى بواسطة m فإنه يوجد لها حد أكبر ما يمكن نرمز له بـ $m0$، حسب مبدأ القيمة العظمى. واضح أن $m0∉A$. حسب شرط الاستقراء وبما أن $1∈A$ وَ $2∈A$، فبعد $m0-1$ مراحل نتوصل إلى أن $m0∈A$ وهذا يتناقض مع كون $m0∉A$. لذلك فالفرض خاطئ. لذلك فإنّ $Bn=ø$ لكل n طبيعي. لذلك $A=N$.

بهذا نكون قد برهنا أنّ كل صفتين من الصفات الخمس المذكورة للأعداد الطبيعية متكافئتان.

سؤال: برهن بشكل مباشر أنّ د ⟵ أ.

برهان: لتكن $A⊂N$ وتحقق شرطي بديهية الاستقراء، أي أن:

1. $1\in A$
2. إذا $k\in A$ فإن $k+1\in A$.

علينا أن نبرهن أن $A=N$ بالاعتماد على مبدأ القيمة الصغرى. نعرف المجموعة:

$B=\{n|\ n\notin A$ وَ $n\in N\}$.

حسب طريقة الفرض الخاطئ نفرض أن $B\neq\emptyset$ لذلك فحسب مبدأ القيمة الصغرى يوجد $m\in B$ وهو الحد الأصغر في B. لذلك $m-1\notin B$ لذلك $m-1\in A$(انتبه $m>1$). حسب شرط الاستقراء فإنّ $m-1+1\in A$ ، لذلك $m\in A$ ، لذلك $m\notin B$، وهذا يتناقض مع كون $m\in B$. لذلك فالفرض خاطئ. لذلك $B=\emptyset$ أي أن $A=N$.

سؤال: برهن بشكل مباشر أن أ⟵د.

برهان: لتكن $\emptyset\neq A\subset N$. علينا أن نثبت أن لِـ A يوجد حد أصغر ما يمكن.

لكل k طبيعي نرمز: $Tk = A\bigcap\{1,2,\ldots,k\}$. نعرف المجموعة:

$B=\{\ k|$ أو لـ Tk يوجد حدّ أصغر ما يمكن $Tk=\emptyset\ \}$

1) $1\in B$ لأن: اذا كان $1\in A$ فهو العدد الأصغر واذا كان $1\notin A$ فإنّ $A\bigcap\{1\}=\emptyset$.

2) نفرض أن $k\in B$ ونبرهن أن $k+1\in B$.

لو كان $A\bigcap\{1,2,\ldots,k\}\neq\emptyset$ فيوجد لها حد أصغر m0, لذلك $A\bigcap\{1,2,\ldots,k,k+1\}\neq\emptyset$ والعدد m0 هو حدها الأصغر ($m0\leq k$). لو كان $A\bigcap\{1,\ldots,k\}=\emptyset$ فإما أن يكون أيضًا $A\bigcap\{1,2,\ldots,k,k+1\}=\emptyset$ أو $A\bigcap\{1,2,\ldots,k,k+1\}=\{k+1\}$. فيكون العدد k+1 هو الحد الأصغر، لذلك $k+1\in B$. حسب الاستقراء الرياضي فإن $B=N$.

بما أن $A\neq\emptyset$ لذلك يوجد n طبيعي بحيث أن $A\bigcap\{1,2,\ldots,n\}\neq\emptyset$ لذلك لهذه المجموعة يوجد حد أصغر ما لأنّها مجموعة نهائية، نرمز له m0 . هذا الحد m0 هو الحد الأصغر للمجموعة A.

ملاحظة: بما أن جميع هذه الصفات متكافئة ولا يمكن برهان أي منها دون الإستعانة بإحدى الصفات الأخرى فيمكن اعتبار كل منها مسلمة (بديهية) واعتبار الأخريات نظريات نابعة من البديهية. بديهية الاستقراء الرياضي هي أول الصفات التي اعتبرت بديهية ومن الممكن الاقتناع بصوابها على النحو التالي:

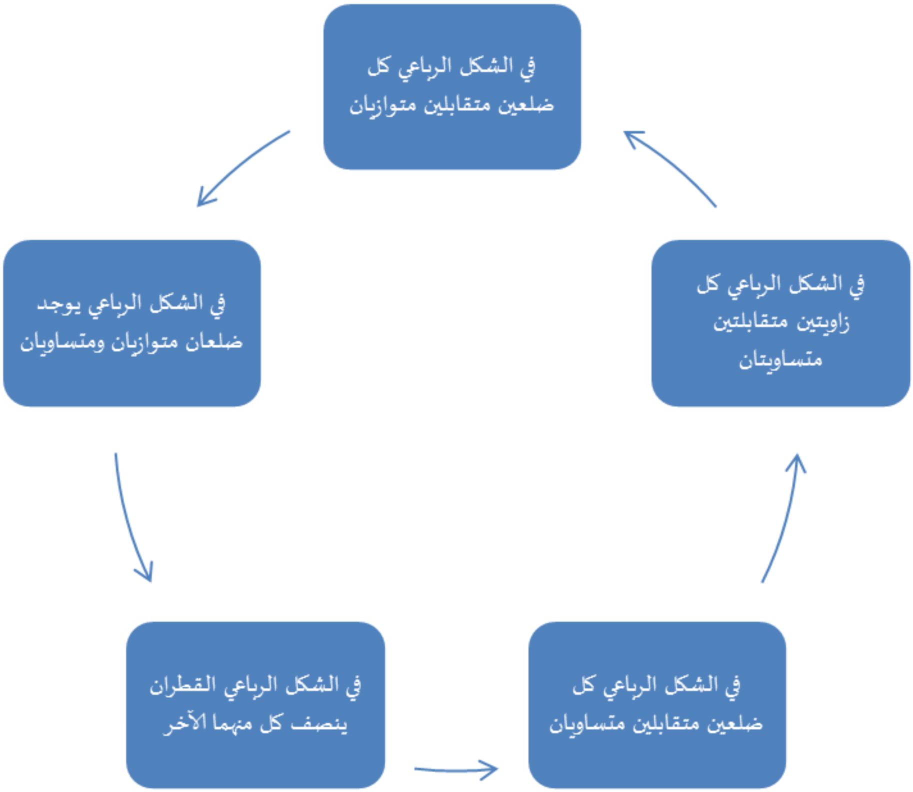
لتكن $A \subset N$ و تحقق $1 \in A$ وكذلك إذا كان $k \in A$ فإنّ $k+1 \in A$. نفهم من الشرطين أن العدد 1 هو عنصر في المجموعة ومن الشرط الثاني نفهم أن لكل عنصر في A العنصر الذي يليه هو أيضًا عنصر في A. بما أن $1 \in A$ لذلك $2 \in A$ لذلك $3 \in A$ وإلخ ...

في الواقع لا يتعرّض معلّم الرياضيات في المرحلة الإعدادية لهذه الصفات للأعداد الطبيعية، لكن من الضروري أن يدرسها بعمق أثناء دراسته الأكاديمية، حتى يزداد اهتمامه بالدقّة أثناء تعريف الاصطلاحات الرياضية وكتابة نصوص النظريات بالشكل الصحيح ومعرفة مراحل البرهان أثناء برهان القضايا الرياضية. عندما يُعلّم المعلّم موضوع متوازي الأضلاع، يُعرّف لتلاميذه متوازي الأضلاع : هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متساويين (وهو تعريف اشتقّ منه اسم الشكل "متوازي أضلاع"). ثمّ يتعرف الطالب على الصفات الآتية لمتوازي الأضلاع: (i) قطراه ينصّف كل منهما الآخر. (ii) كل ضلعين متقابلين فيه متساويان.

(iii) كل زاويتين متقابلتين فيه متساويتان. (iv) فيه ضلعان متوازيان ومتساويان.

نعلّم بأن كل واحدة من هذه الصفات إن تحققت في شكل رباعي فإنّ الشكل هو بالضرورة متوازي الأضلاع. هذا يعني أن كل واحدة من هذه الصفات تكافئ التعريف. لذلك من الممكن أن تكون كل واحدة من هذه الصفات هي تعريف متوازي الأضلاع. لكن هذا يبدو مزعجاً. والسبب هو كون الاسم ،متوازي أضلاع، مشتقاً من صفة التوازي بين كل ضلعين متقابلين. لو أطلقنا عليه مثلاً الاسم "شكل رباعي سويّ" لكان بالإمكان تعريفه بخمس إمكانيات مختلفة. يطلب المعلّم من تلاميذه أن يبرهنوا تكافؤ كل صفتين من صفات متوازي الأضلاع.

يقول التلاميذ إن عليهم برهان عشر قضايا. عندها يوجههم المعلّم إلى فكرة الدورانية في البرهان لاختصار عدد المراحل. فيقترح عليهم تنفيذ مراحل البرهان حسب المخطط الدوراني الآتي:



Proof in the math class

Ali Othman

The importance of Mathematical proof made mathematics an exact and logic science and led to the necessity of the axioms system. However, when there are cases equivalent to one of the axioms, one is considered an axiom and the others are related to as theories or of equivalent attributes. Mathematics science is based on independent axioms, namely on fundamental cases that cannot be proven or derived from other cases. In this article, the induction axiom as well as four equivalent cases are addressed. Each of the four cases are equivalent to the induction axiom. If we consider one of them to be undisputed the others cannot be accepted but theories. When one case (induction) is considered an axiom, the other four are related to as theories.