جامعة، المجلد 17 العدد 1 (2013/1434)، 120-81

استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟"
مفهومها، معانيها، أنواعها، ووظائفها في صف الرياضيات

وجيه ضاهر، أحلام عنبوسي وروان عنبوسي

تلخيص:

نعرض في هذا المقال استراتيجية خاصة لطرح المشكلات وهي استراتيجية "ماذا لو لم يكن". نبدأ بعرض مفهوم استراتيجية طرح المشكلات بشكل عام، وأنواع هذه الاستراتيجية، بما في ذلك استراتيجية "ماذا لو لم يكن"، ونصف سمات وفوائد الاستراتيجية، ذاكرين ما قاله الباحثون في التربية الرياضية بالنسبة لهذه السمات والفوائد. بعدها نعرض دراسات سابقة عالجت أثر استخدام استراتيجية ماذا لو لم يكن على تعلم الطلاب للرياضيات. بعد ذلك نعرض أمثلة مختلفة من الأدب البحثي على استراتيجية "ماذا لو لم يكن"، ونتوسع فنصف استخدام الاستراتيجية في ظاهرة رياضية خاصة، ثم نبين كيفية بحث الظاهرة في صف الرياضيات عن طريق استخدام الاستراتيجية. هدف مهم لنا من هذا المقال هو إثارة اهتمام معلمي الرياضيات بالاستراتيجية واستخدامها، والفعاليات التي نعرضها بالمقال تساعدهم على ذلك.

مقدمة:

الأبحاث الأخيرة في التربية الرياضية لا تشدد فقط على استراتيجيات حل المشكلات كأداة تعليم وتعلم في صف الرياضيات، وإنما أيضا على استراتيجيات طرحها. وذلك لأن استخدام استراتيجيات طرح المشكلات في صف الرياضيات يساعد الطالب على رؤية أوسع للمشكلة، وكذلك على توسيعها وبالتالي توسيع الظاهرة الرياضية التي تصفها المشكلة. وتشير الأبحاث أن استخدام الاستراتيجيتين معا (استراتيجية طرح المشكلات واستراتيجية حل المشكلات) تؤديان إلى قيادة الطلاب نحو فهم أكبر للرياضيات بشكل عام وللموضوع الرياضي المحدد الذي تعالجانه. ويمكن القول بأن استراتيجية طرح المشكلات تقود الطلاب نحو توجه أفضل وطرق أفضل لحل مشكلات رياضية، وكنتيجة لذلك، إلى تحسين مهارات حلهم للمشكلات الرياضية. ويؤدي استخدام هذه الاستراتيجية إلى تنمية دافعيتهم وشعورهم بالإثارة لتعلمها، وبالأخص عندما ينخرطون في حل المشكلات الرياضية بعد انخراطهم في

طرحها. هذا المقال يهتم باستراتيجية خاصة لطرح المشكلات وهي استراتيجية ماذا لو لم يكن؟

مفهوم استراتيجية طرح المشكلات

نوضح أولا مفهوم استراتيجية طرح المشكلات. نعتمد في توضيحنا لمفهومها على الباحثين سونج، ييم، شين ولي (Song, Yim, Shin & Lee, 2007) . اعتمد هؤلاء الباحثون على دراسات سابقة في هذا المجال وصفت استراتيجية طرح المشكلات بطرق مختلفة، ولكن جميعها يشير إلى نفس المعنى وهو أهمية وضرورة طرح مشكلات وأسئلة. عرّف كيلباتريك (Kilpatrick, 1987) هذه الاستراتيجية بأنها "صياغة المشكلات"، بينما وصفها سيلفر (Silver, 1994) بأنها "تشكيل المشكلات"، في حين أشار براون ووالتر (Brown & Walter, 1990) إليها باسم "طرح المشكلات". وأوضح بوليا (Polya, 1981) مفهوم طرح المشكلات بأنه عبارة عن صياغة مشكلات جديدة بعد إيجاد الحل للمشكلة الأصلية، بينما أولى كيلباتريك (1987) اهتماما إلى كيفية تأثير تغيير بعض ظروف أو شروط المشكلة على حلها.

أشارت لافي وبرشادسكي (Lavy & Bershadsky, 2003) إلى أن الأدبيات التي تكلمت عن استراتيجية طرح المشكلات تركّز على عملية طرح المشكلات كمحور الاهتمام وليس على أدوات حل المشكلات، كما وأضافتا بأنه من الممكن تطبيق هذه الاستراتيجية قبل، خلال أو بعد حل المشكلة المعطاة. الكاتبتان وصفتا استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" بأنها مثال على استراتيجية تعتمد طرح مشكلات بالاعتماد على مشكلة معطاة.

يعدّد كيلباتريك (1987) أربع مراحل لاستراتيجية صياغة المشكلات: التجميع، القياس، التعميم والتناقض. أما براون ووالتر (1990) فقد قاما بتقسيم مراحل استراتيجية طرح المشكلات إلى مرحلتين أساسيتين: الأولى هي قبول المشكلة المعطاة كما هي وحلّها، والثانية تحديها، حيث في مرحلة تحدي المشكلة المعطاة تثار مشكلات جديدة. و قام براون ووالتر باقتراح "ماذا لو لم يكن؟" اسما لهذه الاستراتيجية. وفقا لهذه الاستراتيجية فإننا ندرس قضية المشكلة، محدّدين كلا من مكوناتها- بياناتها، ومن ثم نتلاعب بالمشكلة ومعطياتها من

خلال عملية طرح أسئلة "ماذا لو لم يكن؟". تجري هذه العملية في مرحلتين: الأولى هي تدوين جميع العناصر المذكورة في نص المشكلة - معطياتها، والأخرى هي نفي كل من العناصر المدونة بواسطة طرح السؤال :"ماذا لو لم يكن العنصر كما هو؟". بعدها يقدّم المتعلم بدائل للعنصر المنفي، بحيث يُكوّن كل بديل من البدائل مشكلة جديدة.

نصف الآن بعض استراتيجيات طرح المشكلات كما جاءت في كونتوروفيش، كواشو، لايكين وبيرمان (Kontorovich, Koichu, Leikin & Berman, 2012).

- استراتيجية التماثل، وهي صياغة مشكلة جديدة عن طريق التبادل بين هدف المشكلة القائمة وبين ظروفها.
- استراتيجية التلاعب المقيد، وتتم هذه الاستراتيجية عن طريق التلاعب في ظروف المشكلة أو في الافتراضات الضمنية للمشكلة، مثل التغيير العددي، وهو انشاء مشكلة جديدة عن طريق تغيير القيم العددية المعطاة.
- استراتيجية التلاعب بالهدف، وهي خلق مشكلة جديدة عن طريق التلاعب بهدف المشكلة المعطاة أو هدف المشكلة السابقة مع الإبقاء على الفرضيات الأساسية للمشكلة دون تغيير.
- استراتيجية التعميم، وهي خلق مشكلة معينة بحيث تكون المشكلة المعطاة حالة خاصة لها.
- استراتيجية استهداف حل معين، وهي صياغة مشكلة جديدة بشرط أن يتطلب حلها استخدام نظرية، حل أو نهج رياضي خاص.
- استراتيجية التسلسل، وهي عملية توسيع المشكلة القائمة بطرح مشكلات يتطلب حلها حل مشكلات سابقة.

طرح مشكلات كاستراتيجية لتعليم وتعلم الرياضيات: سمات وفوائد

طرح مشكلات وحل أسئلة هما ثيمتان أساسيتان في التربية الرياضية (Pittalis, Christou, Mousoulides & Pitta-Pantazi, 2004). هاتان الثيمتان متعلقتان ببعضهما بشكل متين

كاستراتيجيتين تعليميتين في صف الرياضيات (Kilpatrick, 1987; NCTM, 2000; Stoyanova, 2005) ، حيث يقود استعمال إحداهما إلى الأخرى، وحيث يؤدي استعمال كل منهما إلى قيادة الطلاب نحو فهم أكبر للرياضيات بشكل عام وللموضوع الرياضي المحدد الذي تعالجانه. بتوسع أكبر يمكن القول بأن اهتمام مربي الرياضيات بطرح مشكلات ناتج عن نظرتهم إلى هذه الاستراتيجية كاستراتيجية فعالة لتعليم وتعلم الرياضيات، ليس فقط لقيادة الطلاب نحو توجه أفضل وطرق أفضل لحل مشكلات رياضية، وكنتيجة لذلك، إلى تحسين مهارات حلهم للمشكلات الرياضية (Brown & Walter, 1990; Brown, & Walter, 1993; Leung & Silver, 1997; Perrin, 2007)، وإنما أيضا كطريقة لتحسين وإثراء تصورات الطلاب للرياضيات والمواضيع المختلفة بها، كما تؤدي أيضا لتنمية دافعيتهم وشعورهم بالإثارة لتعلمها، وبالأخص عندما ينخرطون في حل المشكلات الرياضية (English, 1998; Silver, 1994) .

إسهام لين إنجلش (Lyn English) مهم ومؤثر في هذا الميدان، حيث فحص قدرات طلاب صف ثالث، خامس وسابع على طرح المشكلات (English, 1997a, 1997b, 1998)، حيث أظهرت هذه الدراسات إمكانيات وفوائد طرح المشكلات في صف الرياضيات، وفي المدرسة الابتدائية بوجه خاص. باحثون آخرون أشاروا إلى إمكانيات وفوائد استخدام استراتيجية طرح المشكلات في صف الرياضيات، مثلا تمكين الطلاب من تقليل قلقهم حول تعلم الرياضيات، فضلا عن تعزيز إبداعهم بشكل أكبر(1994، Silver ; 1998، English ; 1990، Brown & Walter). بالإضافة إلى ذلك، يقول سيلفر (1997، Silver) بأن حل المشكلات وطرح المشكلات يعززان إبداع الطلاب لأنهما يشجعان الطلاقة، المرونة والتجدد. شريكي (2008، Shriki) وصفت استراتيجية "ماذا لو لم يكن" من ناحية بأنها سهلة التطبيق، لا تحتاج إلى وقت طويل لاستعمالها، ويمكن أن تصبح جزء من التعليم العادي في صف الرياضيات، ومن ناحية أخرى تساهم في تطور التبصر الرياضي للطالب، مما يساهم في زيادة الدافعية لديه لتطوير إبداعه وقدرته على التعميم خلال بحثه واكتشافه للظواهر الرياضية.

نستعرض أدناه بشكل تفصيلي أكثر ما وجده الباحثون بالنسبة لفوائد استخدام استراتيجية طرح المشكلات في صف الرياضيات.

لافي وبرشادسكي (2003) أشارتا إلى أن باحثي التربية الرياضية أكدوا القيمة التربوية الكبيرة لعملية طرح المشكلات من قبل الطلاب، فمن أجل تنفيذها يحتاج الطلاب إلى النظر للمشكلة القديمة من زاوية جديدة، وهذا يتطلب خيالا خلاقا وطريقة جديدة في النظر إلى الأمور. لذا اقترحت الكاتبتان إدراج أنشطة طرح المشكلات كأدوات لتعلم الرياضيات في المدرسة. الباحثون فيليب، شارالامبوس وكريستيو (Philippou, Charalambous & Christou, 2001) أكدوا أن طرح المشكلات هو أصعب من حلها ولذا قدّروا استعمال طرح المشكلات في الصف وشجعوا اعتبارها هدفا رئيسيا لتعليم الرياضيات.

أشارت لافي وبرشادسكي (2003) إلى أن تطوير مهارات طرح المشكلات مهم بشكل خاص لمعلمي الرياضيات ما قبل الخدمة، وذلك لأن هذه المهارات تؤدي إلى تطوير مهارة حلّ المشكلات عندهم. من جهة أخرى فإن استخدام المعلمين لفعاليات تعتمد على طرح المشكلات تكشف لهم عن معرفة الطلاب الرياضية وفهمهم للمواد. كما وأشارتا إلى أن طرح المشكلات يساعد طلاب المدرسة على الحصول على قوة أمام الآخرين (مثل المعلمين)، وفي نفس الوقت يشجعهم على تكوين أفكار جديدة من خلال إكسابهم نظرة أوسع حول ما يمكنهم عمله مع المشكلة. كما تساعد هذه الاستراتيجية المعلمين على فتح نوافذ جديدة أمام الطلاب، فهم العمليات المعرفية التي يمرون بها، اكتشاف المفاهيم الخاطئة عندهم وجمع معلومات عن مستوياتهم التحصيلية. وفقا لذلك سيكون من الممكن تخصيص عملية التعليم بحيث تلائم الأفراد.

هناك الكثير من الايجابيات لاستخدام هذه الاستراتيجية في صف الرياضيات، ومنها ما توصل اليه براون ووالتر (1990)، حيث أفادا أنه عن طريق طرح مشكلات جديدة تتكوّن لدى الطلاب القدرة على إعادة تفسير المشكلة الاصلية والقدرة على الحصول على الدلائل لحلّ هذه المشكلة. وقد وجد اليرتون وكروتيتسكي (Ellerton, 1986; Krutetskii, 1969)

أنه من الممكن أن يكون لطرح المشكلات تأثير ايجابي على تنمية القدرات الابداعية عند الطلاب.

تشير لافي وشريكي (Lavy & shriki، 2007) إلى أن استراتيجية طرح المشكلات هي عنصر هام من عناصر مناهج الرياضيات، وتعتبر جزء ضروريا من الرياضيات العملية. وأضافتا بأن هذه الاستراتيجية تساعد في التقليل من اعتماد الطلاب على المعلم وتزودهم بشعور المشاركة، كما تعزز قدرتهم على التعليل والتفكير الانعكاسي. عندما يصيغ الطلاب أسئلة جديدة سينمو لديهم الفضول والشعور بأنهم يبنون معرفتهم الخاصة مما سيؤدي بهم إلى الحماس في تعلم الرياضيات. استعمال هذه الاستراتيجية يساعد الطلاب على الابتعاد عن النظام التقليدي للتعليم، بحيث يوفر لهم فرصة لمناقشة مجموعة واسعة من الأفكار والنظر في معنى المشكلة بدلا من إيجاد حل لها أو إضافة إليه.

دراسات سابقة

عدا عن دراستهم لفوائد استخدام استراتيجية طرح المشكلات في صف الرياضيات، حاول باحثو التربية الرياضية دراسة قضايا مختلفة متعلقة باستخدام طرح المشكلات بشكل عام واستراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" بشكل خاص في صف الرياضيات. نذكر بعض هذه القضايا: استخدام المعلم واستخدام الطلاب لاستراتيجيات طرح المشكلات بشكل عام واستراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" في صف الرياضيات، اعتقادات المعلم واعتقادات الطلاب بالنسبة لاستخدام استراتيجيات طرح مشكلات واستراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" في صف الرياضيات، تأثير استخدام استراتيجيات طرح مشكلات بشكل عام واستراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" بشكل خاص في صف الرياضيات على بنى تربوية للطلاب والمعلم، اقتراح فعاليات لاستغلال استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" في صف الرياضيات، وتطوير نماذج لاستغلال جيد لاستراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" في صف الرياضيات.

بالنسبة لاستعمال المعلم والطلاب لاستراتيجيات طرح مشكلات وجد إنجلش (1998) أن طلاب صف ثالث واجهوا صعوبات في طرح مشكلات رياضية في سياقات رسمية وأيضا في

سياقات غير رسمية. وبالمقابل، إنجلش (1997a) وجد أن طلاب صف خامس نجحوا في تنويع سياق قصة المشكلة، وهذا زودهم بمرونة أكبر عند طرح المشكلات. بالإضافة إلى ذلك، وجد إنجلش (1997b) أن طلاب صف سابع الذين اشتركوا في برنامج شدّد على طرح مشكلات تمكنوا من تكوين مشكلات رياضية صعبة ويمكن حلّها.

بالنسبة لأنواع المشكلات المطروحة من قبل الطلاب في صف الرياضيات، لافي وبرشادسكي (2003) تصفان أنواع المشكلات التي طرحها طلاب – معلمون عند معالجة مهام صعبة في هندسة الفراغ باستخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن". المشاركون في البحث كانوا 28 معلما متدربا من المرحلة الثانوية اشتركوا في ورشة استخدموا بها استراتيجية طرح مشكلات لها علاقة بمشكلات معطاة. تحليل المشكلات التي طرحها المعلمون المتدربون أظهر مجالا واسعا من المشكلات التي صنفت في فئتين رئيسيتين هما تغيير مركبات المعطيات في المشكلات الرياضية وتغيير السؤال في المشكلة. كل فئة رئيسية قسمت إلى فئات جزئية مناسبة. الفئة الرئيسية الأولى قسمت إلى الفئات الجزئية التالية: تغيير القيم العددية للمعطيات، تغيير نوع المعطى و حذف واحد من معطيات المشكلة. الفئة الثانية قسمت إلى الفئتين الجزئيتين التاليتين: التغيير لسؤال محدد آخر و تحويل المشكلة لمشكلة برهان.

بالنسبة لتأثير استخدام استراتيجيات طرح المشكلات بشكل عام واستراتيجية "ماذا لو لم يكن" بشكل خاص على تعلم الطلاب، درس كار، أوزديمير، إيبك وألبايراك (2010، Kar, Özdemir, Ipek and Albayrak) تأثير نجاح المعلمين قبل الخدمة في طرح وحل مشكلات على تعلمهم موضوع المتواليات. المشتركون في البحث كانوا 76 معلما متدربا اشتركوا في مهام عالجت طرح وحل أسئلة رياضية. نتائج البحث أظهرت أن هناك علاقة ذات دلالة إحصائية بين طرح المشكلات وحل المشكلات. بالإضافة إلى ذلك، وُجدت علاقة دالة إحصائيا بين عدد المشكلات التي طرحها الطلاب وبين نجاحهم في حل المشكلات. دراسة أخرى عالجت تأثير استخدام استراتيجيات طرح مشكلات على بنيات تربوية أخرى هي دراسة طوليك – أوسار (2009، Toluk-Uçar) والتي فحصت تأثير استخدام استراتيجيات حل مشكلات على فهم المعلمين قبل الخدمة في المرحلة الابتدائية للكسور. كانت هناك

مجموعة تجريبية مارست استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" ومجموعة ضابطة لم تمارس هذه الاستراتيجية. في بداية التجربة كان المعلمون قبل الخدمة في كلا المجموعتين جيدين في القيام بإجراءات خاصة بالكسور، ولكن المشكلات الكلامية والتمثيلات التصويرية والتفسيرات التي قاموا بها أظهرت التباسات لديهم بالنسبة للكسور. نتائج الدراسة أظهرت أن طرح المشكلات كان لها تأثير إيجابي على فهم المعلمين قبل الخدمة للكسور، ومن ناحية أخرى على نظرتهم بالنسبة ماذا يعني فهم الرياضيات.

لافي وشريكي (Lavy & Shriki، 2005) درستا تأثير التعلم الذي يعتمد على طرح مشكلات والذي يستخدم استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" على التطور المهني للمعلمين قبل الخدمة، وبشكل خاص على نظرتهم للمعلم الجيد. وجدت الباحثتان أن المعلمين قبل الخدمة، كنتيجة للعمل مع استراتيجية "ماذا لو لم يكن" انتقلوا من أقوال تصريحية إلى أقوال موجهة بشكل عملي. بالإضافة إلى ذلك، الأقوال أصبحت أكثر تحديدا بما يتعلق بالمعرفة الأسلوبية للمعلم الجيد. بالرغم من ذلك، "الصورة العملية" للمعلم الجيد والتي بدت نتيجة لعروض المعلمين قبل الخدمة لم تظهر تغيّرا مماثلا.

أمثلة عملية توضح استخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" في صف الرياضيات:

نعرض أدناه أمثلة من كل مراحل التعليم على استخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" في صف الرياضيات.

<u>استخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن" قبل المدرسة:</u>

المثال الأول - يتعلق بموضوع الاحتمال:

الجو ماطر جدا. سمير، وهو طالب في صف البستان، يخرج من بيته ويسير مشيا على الأقدام إلى المدرسة التي لا تبعد كثيرا عن البيت. ما هو احتمال أن يكون سمير حاملا شمسية تقيه المطر: كبير، صغير، ليس كبيرا وليس صغيرا؟

الخطوة الأولى التي نقوم بها هي حل السؤال ونقاش الحل وتعليله.

الخطوة الثانية هي كتابة معطيات المسألة:

- الحديث هو عن الجو.
- الجو ماطر.
- هناك طالب في صف البستان.
- الطالب يسير مشيا على الأقدام إلى المدرسة.
- المدرسة لا تبعد كثيرا عن بيت الطالب.
- الحديث هو عن شمسية.

الخطوة التالية هي نفي كل صفة من الصفات أعلاه وحساب الاحتمال في حالة النفي. متوقع أن تثير المسألة نقاشا غنيا وحماس الطلاب الصغار، وبالتالي تحمسهم لحل مسائل رياضية.

المثال الثاني – يتعلق بمفاهيم وصفات هندسية:

لدينا أسطوانة نريد أن ندخلها في صندوق مغلق، ولكن يوجد في وجهه الأعلى فتحات بصورة أشكال هندسية مختلفة. ما هو شكل الفتحة التي يمكن أن ندخل منها الصندوق؟

أول خطوة نقوم بها هي حل السؤال ونقاش الحل وتعليله.

ثاني خطوة هي كتابة صفات المسألة:

- الحديث هو عن أجسام.
- الجسم هو أسطوانة.
- الصندوق مغلق.
- هناك فتحات في وجه الصندوق الأعلى.
- كل فتحة بصورة شكل هندسي.

الخطوة التالية هي نفي كل صفة من الصفات أعلاه ونقاش شكل الفتحة في حالة النفي.

<u>استخدام استراتيجية ماذا لو لم يكن في صفوف أول- ثان:</u>

المثال الأول – صفات الأعداد:

مجموع عدد زوجي مع عدد زوجي هو عدد زوجي.

الخطوة الأولى نقوم بها هي تعليل صحة الادعاء ونقاشه.

الخطوة الثانية هي كتابة صفات المسألة:

- هناك عددان زوجيان.
- هناك عملية جمع.
- نتيجة عملية الجمع هي عدد زوجي.

الخطوة التالية هي نفي كل صفة من الصفات أعلاه ونقاش نوع العدد الناتج.

المثال الثاني – صفات الأعداد:

هناك 3 أزواج غريبة من الأعداد إن جمعنا كل زوج ينتج 5.

الخطوة الأولى التي نقوم بها هي تعليل صحة الادعاء ونقاشه. يمكن فعل ذلك عن طريق إيجاد أزواج الأعداد الملائمة.

الخطوة الثانية هي كتابة صفات المسألة:

- معطى العدد 5.
- العدد 5 هو عدد فردي.
- الحديث هو عن مضافين إن جمعناهما يعطي جمعهما العدد المعطى.
- عدد الأزواج المعطى هو 3.

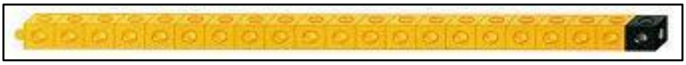
الخطوة التالية هي نفي كل صفة من الصفات أعلاه ونقاش عدد أزواج المضافات الناتج.

<u>استخدام استراتيجية ماذا لو لم يكن في صفوف ثالث - سادس</u>

المثال الأول: لعبة نيم - NIM

المثال، بما في ذلك الرسوم الموضحة، هو من سونغ، ييم، شين ولي (Song, Yim, Shin & Lee ،2007):

عشرون وحدة من المكعبات الصفراء متصلة مع مكعب واحد أسود كما في الشكل. لاعبان، كل بدوره يأخذ من مكعب حتى ثلاث مكعبات كل مرة من سلسلة المكعبات. اللاعب الذي يأخذ المكعب الأخير هو الرابح.



شكل 1: مكعبات متصلة – الحالة المعطاة

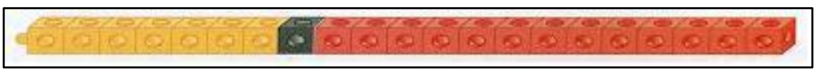
في البداية يمكننا أن نسأل: ما هي أفضل استراتيجية لربح اللعبة؟

كخطوة ثانية يمكننا أن نحدّد معطيات اللعبة، كما يظهر في جدول 1.

جدول1 : المعطيات الأساسية في لعبة نيم (NIM)

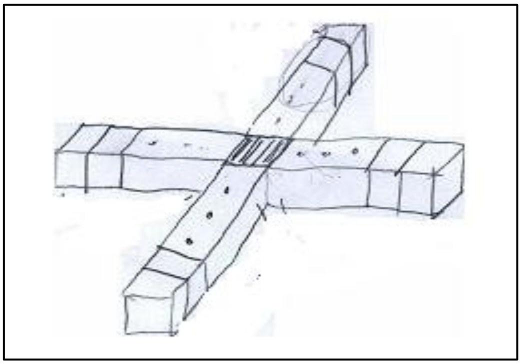
ثيم المعطيات	قيمة المعطيات الأولية
عدد المكعبات	21
عدد ألوان المكعبات	2
توزيع المكعبات على الألوان	20 من أحد الألوان و 1 من اللون الآخر
عدد المكعبات المأخوذة من كل لون	1-3
الرابح في اللعبة	من يأخذ آخر مكعب
شكل ترتيب المكعبات	خطي
عدد اتجاهات	اتجاهان
عدد أبعاد الشكل	1
عدد اللاعبين	شخصان

نأخذ الآن كل معطى ونسأل ماذا لو لم يكن المعطى بالنسبة له هو المعطى الأولي؟ يمكننا أن نأخذ معطيين بنفس الوقت ونغيرهما. مثلا نسأل: ماذا لو غيرنا عدد الألوان وتوزيع المكعبات على الألوان؟ مثلا ماذا لو كان لدينا 21 مكعبا، واحد منها أسود في الوسط، سبعة صفراء، وثلاثة عشر سوداء؟



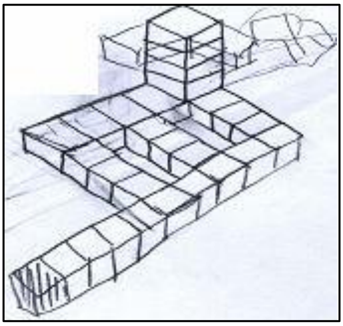
شكل 2 : تغيير عدد الألوان وتوزيع المكعبات على الألوان

يمكننا أيضا أن نسأل: ماذا لو غيرنا عدد اتجاهات الشكل؟



شكل 3 : تغيير عدد الاتجاهات

أو: ماذا لو غيرنا عدد أبعاد الشكل؟



شكل 4 : تغيير عدد أبعاد الشكل

المثال الثاني – صفات ضرورية في الأشكال الهندسية:

بعض الصفات الضرورية في المثلث هي:

كل مثلث به 3 رؤوس، 3 أضلاع و 3 زوايا. مجموع زوايا المثلث 180 درجة.

الخطوة الأولى هي أن نعلل سبب صحة الصفات المعطاة.

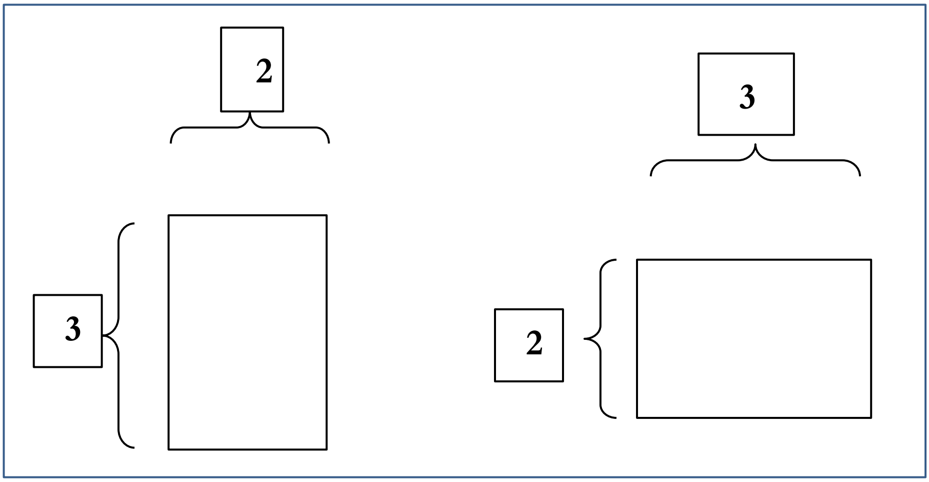
الخطوة الثانية هي أن نكتب معطيات الظاهرة الرياضية:

- معطى شكل هندسي.
- الشكل الهندسي هو مثلث.
- معطاة بعض صفات الشكل الهندسي المعطى.

- الصفات المعطاة هي صفات ضرورية.

الخطوة الثالثة هي أن ننفي كل معطى من المعطيات ونفحص ما هي الظاهرة الناتجة عندها.

المثال الثالث مأخوذ من براون ووالتر (1990)، وهو يطلب حساب مساحة مستطيل عرضه هو 2 متر وطوله 3 امتار (شكل 5).



شكل 5: مساحة مستطيل معطى طوله وعرضه

معطيات الظاهرة:

- القضية المعروضة هي مسألة.
- المسألة تطلب إجراء عملية حساب.
- يتعامل التمرين مع اربع جوانب للشكل.
- التمرين يتعامل مع مستطيل.
- المطلوب هو حساب المساحة.
- تم تحديد طول وعرض الشكل.
- معطى لدينا عددان.

بعد ذلك يأتي دور طرح سؤال "ماذا لو لم يكن" بالنسبة لكل صفة أساسية من صفات القضية، مثلا نسأل: ماذا لو لم يتم تحديد طول وعرض المستطيل؟ ماذا لو لم يتم تحديد عرض المستطيل؟ ما هي المستطيلات الناتجة لو تم تحديد طول المستطيل فقط؟ ما هي المستطيلات الناتجة لو تم تحديد عرض المستطيل فقط؟

<u>استخدام استراتيجية ماذا لو لم يكن في المدرسة الإعدادية:</u>

المثال الأول مأخوذ أيضا من براون ووالتر (1990)، وهو يعرض ظاهرة عددية لتمرين قسمة:

$$\frac{64}{16} = \frac{4}{1} = 4$$

<u>معطيات الظاهرة:</u>

- على طرف اليسار يوجد كسر غير حقيقي (اكبر من 1).
- على طرف اليمين يوجد عدد صحيح.
- يتكون البسط من عدد ثنائي المنزلة.
- يتكون المقام من عدد ثنائي المنزلة.
- على طرف اليمين يوجد حاصل قسمة البسط والمقام.
- حاصل القسمة عبارة عن: حاصل قسمة رقم الآحاد في البسط على رقم العشرات في المقام.
- بين الطرفين توجد مساواة.

نطرح أسئلة "ماذا لو لم يكن"، مثلا: ماذا لو لم يكن على الطرف اليسار كسر غير حقيقي؟ اي ماذا لو كان العدد أصغر من 1؟ ماذا لو لم يكن الطرف الأيمن عددا صحيحا؟ ماذا لو كان كسرا او عدد مخلوط؟ ماذا لو كان احد العوامل صفرا؟ ماذا لو لم يكن البسط او المقام عددا ثنائيا؟ ماذا لو كان عدد المنازل ثلاثيا او أكثر؟

المثال الثاني يعرض معالجة عدد حلول المعادلات البولينومية:

المعادلة $x^2=4$ لها حل واحد

معطيات الظاهرة:

- لدينا معادلة.
- المعادلة هي تربيعية.
- المعادلة لها حلان.
- الحلان هما 2 و 2-.

نطرح اسئلة "ماذا لو لم يكن؟"، ونفحص ما هي الحلول الناتجة في كل نفي لأحد معطيات الظاهرة وما هو عدد هذه الحلول.

<u>استخدام استراتيجية ماذا لو لم يكن في المدرسة الثانوية:</u>

نعرض أدناه بعض الأمثلة التي عرضها براون ووالتر (1990) ونري كيف يمكن تطوير مواضيعها الرياضية باستخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟".

المثال الأول مأخود من براون ووالتر (1990).

معطاة متوالية فيبوناتشي: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .

أول خطوة نقوم بها هي كتابة صفات المتوالية:

- الحدان الأوليان بالمتوالية هما 1، 1.
- الحدان الأوليان بالمتوالية متساويان.
- كل حد، بدء من الحد الثالث، يساوي مجموع الحدين اللذين يسبقانه.
- نهاية قسمة كل حدين متتاليين في المتوالية هي النسبة الذهبية: 0.618.
- تربيع أي حد يختلف بـ 1 عن حاصل ضرب العددين المجاورين له.
- إذا رمزنا للحد النوني بـ F_n فإن:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$$

$$F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \ldots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2$$

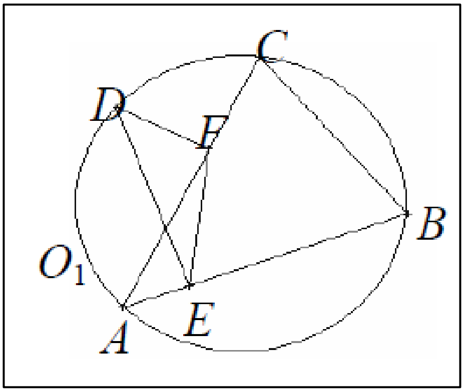
- الفروق الناتجة عن كل حدين متجاورين في المتوالية تنتج متوالية جديدة تحقق الصفات أعلاه ما عدا أوّل صفتين.

الخطوة التالية يمكن أن تكون تعليل أو برهان الصفات 3-7.

بعد ذلك يأتي دور طرح سؤال "ماذا لو لم يكن" بالنسبة لكل صفة أساسية من صفات المتوالية، وهي أول ثلاث صفات. ومن ثم فحص مدى صحة بقية الصفات في حال نفي الصفة الأساسية. مثلا نسأل: ماذا لو كان الحدان الأولان في المتوالية 2، 3 وكل حد، بدء من الثالث يساوي حاصل جمع العددين السابقين له؟ يمكن أيضا أن ننفي صفتين بنفس الوقت، مثلا: ماذا لو كان الحدان الأولان في المتوالية 2، 3 وكل حد، بدء من الثالث يساوي حاصل ضرب العددين السابقين له؟

المثال الثاني مأخوذ من لافي وشريكي (Lavy & Shriki، 2007).

في الشكل التالي المثلث ABC محصور في الدائرة O_1. D هي نقطة على الدائرة O_1 . رسم عمودان من النقطة D على الضلع AB والضلع AC. النقطتان E و F هما نقطتا تقاطع العمودين مع الضلعين. أين يجب أن تقع النقطة D بحيث يكون طول القطعة EF أكبر ما يمكن؟



شكل 6: **مثلث محصور داخل دائرة**

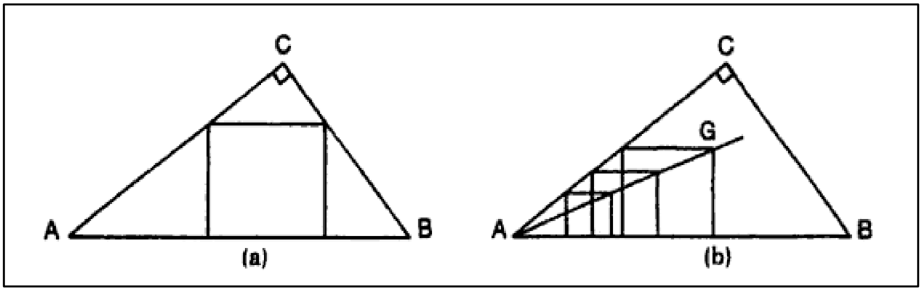
الخطوة الأولى هي حل السؤال بمعطياته الأولية. وبعدها نسأل ماذا لو غيّرنا أحد معطيات السؤال. أسئلة "ماذا لو لم يكن" الممكنة هي:

- ماذا لو لم يكن الشكل الحاصر دائرة؟

- ماذا لو لم يكن الشكل المحصور مثلثا؟
- ماذا لو كانت النقطة D لا تقع على محيط الدائرة؟
- ماذا لو كانت القطعتان DF و DE ليستا عمودين؟

المثال الثالث مأخوذ من براون ووالتر (1990).

نريد إيجاد مساحة مربع محصور داخل مثلث قائم الزاوية بحيث يكون أحد أضلاع المربع على قاعدة المثلث (شكل 11).



شكل 7: مربع داخل مثلث قائم الزاوية

معطيات الظاهرة:

- الظاهرة تتحدث عن مثلث.
- المثلث هو مثلث قائم الزاوية.
- الظاهرة تتحدث عن شكل محصور في المثلث.
- الشكل المحصور في المثلث هو مربع.
- المربع له ضلع على قاعدة المثلث.
- المشكلة تتحدث عن مساحة المربع.
- هناك شكلان مختلفان معطيان.
- الحديث هو عن أشكال في المستوى.

بعد ذلك يأتي دور طرح سؤال "ماذا لو لم يكن" بالنسبة لكل معطى من معطيات الظاهرة، وفحص ونقاش صفات الظاهرة الجديدة الناتجة.

بحث ظاهرة بشكل مفصل عن طريق استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟"

في هذا القسم سوف نوضح مثالا بشكل مفصل حول استخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن" في تعليم الرياضيات.

الظاهرة:

$$\sqrt{64} = 6 + \sqrt{4} = 8$$

هذه الظاهرة تصف علاقة مساواة بين جذر عدد وبين حاصل جمع الرقم في خانة العشرات للعدد وجذر الرقم في خانة الآحاد.

نسأل: هل هذه الظاهرة صحيحة دائما؟ متى تتحقق هذه الظاهرة؟

نطرح بداية مثالا لفحص إمكانية تحقق هذه الظاهرة لأعداد أخرى غير 64، نختار العدد 49:

$$\sqrt{49} = 4 + \sqrt{9} = 7$$

نأخذ بعين الاعتبار عند اختيار العدد أن لا تكون منزلة الآحاد مساوية لأحد الأرقام $\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ لأن هذه الأعداد لا يوجد لها جذر صحيح. نبرهن عدم تحقق الظاهرة لهذه الأعداد بالطريقة التالية:

نفرض أن خانة الآحاد مساوية للرقم 2 و a هو الرقم في خانة العشرات، وبذلك ستكون العلاقة على النحو التالي:

$$\sqrt{10a + 2} = a + \sqrt{2}$$

نربع الطرفين:

$$10a + 2 = a^2 + 2a\sqrt{2} + 2$$

نضع جذر 2 في طرف وحده.

$$\frac{10a - a^2}{2a} = \sqrt{2}$$

بما أن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي والعدد $\frac{10a-a^2}{2a}$ هو عدد نسبي (لأن a عدد صحيح) فإن المساواة لا تتحقق.

يمكن اتباع نفس الخطوات بالنسبة للأعداد الأخرى المذكورة أعلاه.

نفحص بالنسبة للأعداد التي تكون منزلة الآحاد فيها مساوية لأحد الأرقام: 9 ,4 ,1، فيما إذا تحقّق الظاهرة أم لا، نختار أمثلة بشكل عشوائي:

$$\sqrt{54} = 5 + \sqrt{4} = 7$$

نرى بان الظاهرة لا تتحقق دائما للأعداد ثنائية المنزلة والتي آحادها أحد الأرقام أعلاه..

نتبع نهجا رياضيا لاكتشاف جميع الأعداد ثنائية المنزلة التي تحقق الظاهرة.

لنفرض أن لدينا العدد [x][y]. ليحقق العدد الظاهرة يجب أن يتحقق:

$$\sqrt{10x + y} = x + \sqrt{y}$$

نربع الطرفين:

$$10x+y = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$$

$$10x = x^2 + 2x\sqrt{y} \qquad /:x \ (x \neq 0)$$

$$10 = x + 2\sqrt{y}$$

$$x = 10 - 2\sqrt{y}$$

نفحص الإمكانيات المختلفة لتحقق المعادلة أعلاه وذلك بأخذ القيم المختلفة لرقم الآحاد:0-9، ويمكن استخدام الجداول الإلكترونية لسهولة القيام بذلك بها. جدول 2 يبين عملية الفحص.

جدول 2: فحص تحقق الظاهرة للأعداد ثنائية المنزلة

العدد	x	y
غير ممكن لأن منزلة العشرات هي 0-9	10	0
81	8	1
73.71573	7.171573	2
68.35898	6.535898	3
64	6	4
60.27864	5.527864	5
021 57.0	5.1010	
54.08497	4.708497	7
51.43146	4.343146	8
49	4	9

يظهر من خلال الجدول أن الأعداد التي تحقق الظاهرة هي :81، 64 و49.

الخطوة التالية هي استخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن؟" وذلك باتباع مراحلها التي ذكرناها سابقا.

أوّلا نقوم بتدوين معطيات الظاهرة:

1. على الطرف الأيسر يوجد جذر تربيعي.
2. تحت الجذر يوجد عدد ثنائي المنزلة.
3. على الطرف الأيمن يوجد مجموع.
4. المضاف الأول هو رقم العشرات للعدد ثنائي المنزلة تحت الجذر على الطرف اليسار.
5. المضاف الثاني هو الجذر التربيعي لرقم الآحاد للعدد ثنائي المنزلة تحت الجذر على الطرف اليسار.
6. بين الطرفين توجد مساواة.

نبدأ بنفي كل معطى من معطيات المشكلة ومن ثم نطرح البدائل الممكنة له، وبذلك نُكوّن مشكلات جديدة.

أولا، ننفي كون العدد ثنائي المنزلة، فنطرح السؤال: ماذا لو لم يكن العدد ثنائي المنزلة؟

البدائل الممكنة هي أن يكون العدد ثلاثي المنزلة، رباعي المنزلة، إلخ.

نطرح المشكلة: ماذا لو كان العدد ثلاثي المنزلة؟

نطرح مثالا عدديا بحيث تكون خانة الآحاد للعدد فيه مساوية لأحد الأرقام 9 ,4 ,1، ونفحص تحقّق الظاهرة:

$$\sqrt{121} \neq 12 + \sqrt{1} = 13$$

نلاحظ أن الظاهرة لا تتحقق وذلك لأن القضية $\sqrt{121} = 12 + \sqrt{1}$ هي قضية كذب، ولكن نلاحظ بأننا إذا قمنا بتغيير عملية الجمع إلى عملية طرح فإن القضية ستتحول إلى قضية صدق بحيث أن:

$$\sqrt{121} = 12 - \sqrt{1} = 11$$

ولكن نسأل أيضا متى تتحقق هذه الظاهرة "الجديدة"؟ هل تتحقق لكل الاعداد ثلاثية المنزلة التي جذرها عدد طبيعي ومنزلة الآحاد فيها هي أحد الارقام 1, 4, 9 ؟

من خلال الفحص نستطيع أن نعرف بأنها تتحقق بالنسبة لكثير من الاعداد مثل 144 ، 169، ... ولكن ماذا مع العدد 289؟ هو عدد ثلاثي المنزلة، به الرقم في منزلة الآحاد هو 9 والعلاقة لا تتحقق:

$$\sqrt{289} \neq 28 - \sqrt{9} = 25$$

حصلنا على 25 والمفروض إن تكون الإجابة تساوي 17. يمكن تفسير ذلك عن طريق مقارنة قيمة جذر العدد 289 وهو 17، بالعدد الذي نحصل عليه عند حذف خانة الآحاد من العدد تحت الجذر، فإذا كان هذا العدد 28 سنحصل على العدد $\sqrt{[28][a]}$ وهو عدد اصغر من 17 واكبر من 16. مثال:

$$16 < \sqrt{[28][a]} < 17$$

حسب الظاهرة فإن :

$$\sqrt{[28][a]} = 28 - \sqrt{a}$$

بما أن: $0 \leq a \leq 9$

$$25 \leq 28 - \sqrt{a} \leq 28$$

لذا فإن هذه الظاهرة لن تتحقق للعدد [28][a] وبنفس الصورة لا يتحقق للأعداد 220-999.

يمكن أن نقوم ببرهنة ذلك رياضيا بالطريقة التالية:

نحن نبحث عن أعداد تحقق:

$$\sqrt{100c + 10b + a} = 10c + b - \sqrt{a}$$

نربع الطرفين.

$$100c + 10b + a = 100c^2 + 20cb + b^2 - 2\sqrt{a}(10c + b) + a$$
$$100c + 10b = 100c^2 + 20cb + b^2 - 2\sqrt{a}(10c + b)$$

إذا كان c=1 ينتج:

$$100 + 10b = 100 + 20b + b^2 - 2\sqrt{a}(10 + b)$$

أي:

$$2\sqrt{a}(10+b) = 10b + b^2$$

$$2\sqrt{a}(10+b) = b(10+b)/:(10+b)$$

$$2\sqrt{a} = b$$

الحلول الممكنة (نعوض بدل رقم الآحاد من 0 حتى 9) موجودة في جدول 3:

جدول 3: الأعداد ثلاثية المنزلة التي تحقق الظاهرة ورقم المئات فيها هو 1

b	a	c	العدد
0	0	1	100
2	1	1	121
2.828427	2	1	130.2843
3.464102	3	1	137.641
4	4	1	144
4.472136	5	1	149.7214
4.898979	6	1	154.9898
5.291503	7	1	159.915
5.656854	8	1	164.5685
6	9	1	169

عندما c=2 ينتج:

$$200 + 10b = 400 + 40b + b^2 - 2\sqrt{a}(20+b)$$

$$2\sqrt{a}(20+b) = 200 + 30b + b^2$$

$$\sqrt{a} = \frac{200+30b+b^2}{2(20+b)} = \frac{(b+10)(b+20)}{2(20+b)} \quad / \, b \neq -20$$

$$\sqrt{a} = \frac{b+10}{2}$$

يمكن فحص الامكانيات المختلفة بالنسبة للرقم a بطريقتين، الأولى بواسطة الجداول الإلكترونية والثانية بطريقة رياضية:

الجدول 4 يبين طريقة الجداول:

جدول 4: رقم الآحاد في عدد ثلاثي المنزلة يحقق الظاهرة عندما رقم المئات هو 2

b	a
0	25
1	30.25
2	36
3	42.25
4	49
5	56.25
6	64
7	72.25
8	81
9	90.25

بطريقة جبرية:

$$\sqrt{a} = \frac{b + 10}{2}$$

بما أن $b \in \{0,1,2,\ldots\ldots,9\}$ ينتج:

$$\sqrt{a} \geq 5$$

$$a \geq 25$$

وهذا يتعارض مع كون a رقما بين الصفر والتسعة.

يمكن تكرار هذه العملية بالنسبة لباقي الأرقام، أي عندما تكون c هي أحد الأرقام 9-3.

ومن ذلك نستنتج أن هذه الظاهرة لن تتحقق بالنسبة للأعداد 999-210.

نسأل نفس سؤالنا السابق بالنسبة لعدد مكون من أكثر من ثلاثة خانات.

يمكن التعامل مع هذه المشكلة (بالنسبة لعدد مكون من أي عدد من الخانات) بطريقة تختلف عما سبق، وذلك عن طريق مقارنة العدد مع مربعه.

لكل عدد a نُقسِم a^2 إلى عددين، الأول مكوّن من نفس عدد خانات العددa والموجود في بداية العدد (من اليسار)، نسميه "العدد المناسب ل a في تربيعه"، والآخر المتبقي نسميه "الجزء المتبقي من مربع العدد a".

مثال: العدد 235، مربعه هو 55225. العدد المناسب للعدد 235 في تربيعه هو 552 والجزء المتبقي من مربع العدد 235 هو العدد 25.

ادعاء: شرط تحقق الظاهرة الرياضية المطروحة أعلاه هو ان يكون الفرق بين العدد a والعدد المناسب له في تربيعه يساوي الجذر التربيعي للجزء المتبقي من مربع العدد. ملحق 1 يبين صحة الادعاء.

مثلا العدد 91، مربعه يساوي 8281. نفحص فيما اذا كان العدد يحقق الظاهرة:

العدد الملائم للعدد 91 في تربيعه هو 82، ننظر للفرق بينهما، ان كانت هذه القيمة مساوية لجذر الجزء المتبقي (في هذه الحالة 9) تكون الظاهرة قد تحققت.

$$91 - 82 = 9 = \sqrt{81}$$

وبالفعل تتحقق الظاهرة بحيث:

$$\sqrt{8281} = 82 + \sqrt{81}$$

ادعاء بديل: شرط أساسي لعدم تحقق الظاهرة الرياضية المطروحة أعلاه هو أن يكون الفرق بين العدد a والعدد المناسب له في تربيعه أكبر من الجذر التربيعي للجزء الأول لمربع العدد. لذلك ننتبه عند فحص الأعداد بأن يكون الفرق بين العدد والعدد الملائم له في تربيعه أصغر أو يساوي جذر أكبر عدد مكون من خانات القسم المتبقي للعدد. في حالة تحقق هذا الشرط نستمر لفحص ان كان الفرق بين العدد والعدد الملائم له في تربيعه مساويا لقيمة جذر القسم المتبقي من العدد.

مثلا ان اردنا فحص هل يحقق العدد 110 ومربعه 12100 الظاهرة.

العدد الملائم للعدد 110 في تربيعه هو 121. الفرق بينهما : 11، لذا لا داعي في استمرار الفحص فلا يمكن للظاهرة ان تتحقق ما دام الفرق اكبر من 9 وهو جذر أكبر عدد مكون من منزلتين.

ننتبه أن العدد ثلاثي المنازل الذي يتكون مربعه من خمس منازل، فيه الجذر التربيعي للجزء المتبقي من مربع العدد اقل من 10 وذلك لان القيمة العظمى لعدد ثنائي المنزلة هي 99 وبالتالي تكون قيمة جذره اقل من 10. لتحقق الظاهرة بالنسبة لهذه الأعداد يجب أن

يكون الفرق بين العدد وبين الجزء الملائم للعدد في تربيعه اقل من 10. ولذا في هذه الحالة لا ننظر للأعداد التي يكون الفرق بينها وبين العدد الملائم لها في تربيعها أكبر من 9.

الظاهرة لا تتحقق بالنسبة للعدد 235 وذلك لان:

$$\sqrt{552-235} > 9$$

ملاحظة: يمكن الاستعانة بالأعداد التي تنتهي بأصفار وذلك لسهولة حساب مربعها. وعندها تكون هذه الأعداد حدودا فارقة نقارن أعدادا أخرى بواسطتها.

مثلا:

X	x^2
400	160000
500	250000

الجزء المناسب للعدد 400 هو 160 أما الجزء المناسب للعدد 500 فهو 250. من الواضح أن الجزء المناسب لكل الأعداد 400-500 هو بين 160-250 (لننتبه أن لكلا المربعين ثلاثة أصفار في البداية).

مثال 1:

أعداد ثنائية المنزلة والتي مربعها أعداد رباعية المنزلة هي أعداد بين 32 و99 كما يتبين في جدول 5.

جدول 5: أعداد ثنائية المنزلة والتي مربعها أعداد رباعية المنزلة

x	x^2
32	1024
40	1600
50	2500
60	3600
70	4900
80	6400
90	8100

91	8281
92	8464
93	8649
94	8836
95	9025
96	9216
x	x^2
97	9409
98	9604
99	9801

في الأعداد ثنائية المنزلة التي مربعها مكون من أربع خانات ننظر إلى الرقم 9 بدلا من جذر القسم المتبقي من مربع العدد. الأعداد 1024-8100 لا تحقق الظاهرة مع أنها تحقق الادعاء أعلاه.

مثلا بالنسبة للعدد 8100، 9=81-90 وفي نفس الوقت 9 تساوي جذر أكبر عدد مكون من خانتين، ومع ذلك فإن العدد 8100 لا يحقق الظاهرة التي ندرسها. أي أن الشرط في الادعاء البديل هو ضروري ولكنه غير كاف.

عندما نصل إلى العدد 90 الذي مربعه يساوي 8100، نلاحظ أن الفرق بين جذر الجزء الأول للعدد والعدد يساوي 9. هذا العدد لا يحقق الظاهرة، أما الأعداد التي تليه فتحقق، وهي:

(91، 8281)، (92، 8464)، (93، 8649)، (94، 8836)، (95، 9025)، (96، 9216)، (97، 9409)، (98، 9604)، (99، 9801).

مثال 2: ننظر إلى الأعداد المكونة من ثلاث خانات ومربعها مكون من خمس خانات. أصغر هذه الأعداد هو العدد 100 وأكبرها هو العدد 316. نلاحظ أن الفرق بين العدد والعدد الملائم له في تربيعه يجب أن لا يكون اكبر من 9، نقوم بكتابة جدول للعدد وتربيعه:

جدول 6: الأعداد المكونة من ثلاث خانات ومربعها مكون من خمس خانات

x	x^2
100	10000
101	10201
102	10404
103	10609
104	10816
105	11025
106	11236
107	11449
108	11664
109	11881
110	12100
120	14400
150	22500
180	32400
200	40000
250	62500
300	90000
316	99856

يتضح من الجدول أن الأزواج التي تحقق الصفة المطلوبة هي الأزواج التالية والتي تحقق الظاهرة عندما نستبدل الجمع بالطرح.

(100، 10000)، (101، 10201)، (102، 10404)، (103، 10609)، (104، 10816)، (105، 11025)، (106، 11236)، (107، 11449)،)، (108، 11664)، (109، 11881).

مثال: بالنسبة للعدد 10201: $\sqrt{10201} = 102-\sqrt{01} = 101$

مثال 3: ننظر إلى الأعداد المكونة من ثلاث خانات ومربعها مكون من ست خانات. أصغر هذه الأعداد هو العدد 317 وأكبرها هو العدد 999. نلاحظ أن الفرق بين العدد والعدد الملائم له في تربيعه يجب أن لا يكون اكبر من 31، نقوم بكتابة جدول للعدد وتربيعه:

جدول 7: الأعداد المكونة من ثلاث خانات ومربعها مكون من ست خانات

x	x^2
317	100489
400	160000
500	250000
600	360000
700	490000
800	640000
900	810000
968	937024
969	938961
970	940900
971	942841
972	944784
973	946729
974	948676
975	950625
976	952576
977	954529
978	956484
979	958441
980	960400
981	962361
982	964324
983	966289
984	968256
985	970225
986	972196

987	974169
988	976144
989	978121
990	980100
991	982081
992	984064
993	986049
994	988036
995	990025
996	992016
997	994009
998	996004
999	998001

يتضح من الجدول أن الأزواج التي تحقق الصفة المطلوبة هي الأزواج التالية والتي تحقق الظاهرة الأصلية:

(969، 938961)، (970، 940900)، (971، 942841)، (972، 944784)، (973، 946729)، (974، 948676)، (975، 950625)، (976، 952576)، (978، 956484)، (979، 958441)، (980، 960400)، (981، 962361)، (982، 964324)، (983، 966289)، (984، 968256)، (985، 970225)، (986، 972196)، (987، 974169)، (988، 976144)، (989، 978121)، (990، 980100)، (991، 982081)، (992، 984064)، (993، 986049)، (994، 988036)، (995، 990025)، (996، 992016)، (997، 994009)، (998، 996004)، (999، 998001).

مثال 4: ننظر إلى الأعداد المكونة من أربع خانات ومربعها مكون من سبع خانات. أصغر هذه الأعداد هو العدد 1000 وأكبرها هو العدد 3162. نلاحظ أن الفرق بين العدد والعدد الملائم له في تربيعه يجب أن لا يكون اكبر من 31، نقوم بكتابة جدول للعدد وتربيعه:

جدول 8: الأعداد المكونة من أربع خانات ومربعها مكون من سبع خانات

x	x^2
1000	1000000
1001	1002001
1002	1004004
1003	1006009
1004	1008016
1005	1010025
1006	1012036
1007	1014049
1008	1016064
1009	1018081
1010	1020100
1011	1022121
1012	1024144
1013	1026169
1014	1028196
1015	1030225
1016	1032256
1017	1034289
1018	1036324
1019	1038361
1020	1040400
1021	1042441
1022	1044484
1023	1046529
1024	1048576
1025	1050625
1026	1052676

1027	1054729
1028	1056784
1029	1058841
1030	1060900
1031	1062961
1032	1065024
1500	2250000
2000	4000000
2500	6250000
3000	9000000
3162	9998244

يتضح من الجدول أن الأزواج التي تحقق الصفة المطلوبة هي الأزواج التالية والتي تحقق الظاهرة عندما نستبدل الجمع بالطرح.
(1000، 1000000)، (1001، 1002001)، (1002، 1004004)، (1003، 1006009)، (1004، 1008016)، (1005، 1010025)، (1006، 1012036)، (1007، 1014049)، (1008، 1016064)، (1009، 1018081)،...، (1030، 1060900)، (1031، 1062961).

توجه آخر للحل:

يمكن التعامل مع هذه المشكلة (بالنسبة لعدد مكون من أي عدد من الخانات) بطريقة أخرى، وهي طريقة عامة أكثر ولكنها تنفع لمراحل أعلى من المدرسة[1]:

$$\sqrt{[\mathrm{x}][\mathrm{y}]} = [\mathrm{x}] + \sqrt{[\mathrm{y}]}$$
$$\sqrt{\mathrm{x} \times 10^{\mathrm{m}} + \mathrm{y}} = x + \sqrt{\mathrm{y}}$$

- حيث ان m هو عدد خانات العدد y

بعد تربيع طرفي المعادلة، نحصل على ما يلي:

$$\mathrm{x} \cdot 10^{\mathrm{m}} + \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 + 2 \cdot \mathrm{x} \cdot \sqrt{\mathrm{y}} + \mathrm{y}$$

[1] نشكر الدكتور علي عثمان من أكاديمية القاسمي على اقتراح هذه الطريقة وإنارة الطريق لبرهان بعض خواص الظاهرة أدناه.

$$(*)\, x \cdot 10^m = x^2 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{y}$$

نأخذ مثلا m=2 ، أي أن y مكون من خانتين، وعندها ينتج:

$$x \cdot 10^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{y}$$

ننظر إلى القيم الممكنة للعدد y وهي الأعداد المكونة من خانتين وجذرها عدد صحيح: 01، 04، 09، 16، 25، 36، 49، 64، 81.

نعوض في (*) كلا من هذه الأعداد، مثلا عندما *y=1* ينتج:

$$x \times 10^2 = x^2 + 2x \times \sqrt{1}$$

$$x^2 - 98x = 0$$

$$x=0,\ x=98$$

الجدول 9 يظهر كل الأعداد التي تنتج عندما *m=2*:

جدول 9: الأعداد التي تنتج عندما *m=2*

M	y	X	الأعداد الناتجة
2	01	x=0, x=98	001 ،9801
	04	x=0, x=96	004 ،9604
	09	x=0, x=94	009 ،9409
	16	x=0, x=92	9216،016
	25	x=0, x=90	025 ،9025
	36	x=0, x=88	036 ،8836
	49	x=0, x=86	049 ،8649
	64	x=0, x=84	064 ،8464
	81	x=0, x=82	081 ،8281

ولذلك الأعداد الناتجة من التعويض كما يظهر في الجدول هي: 64, 81, 8281, 8464, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 8649, 8836, 9025, 9216, 9409, 9604, 9801.

استنتاجات من العمل على أيجاد أعداد تحقق الظاهرة: من الجداول التي تم عرضها، نستنتج الخصائص التالية:

الخاصة الأولى:

الأعداد التي تحقق الظاهرة هي أعداد لها جذور صحيحة، كما أن للقسم المتبقي في هذه الأعداد جذر صحيح أيضا.

الخاصة الأولى صحيحة لأن الظاهرة نفسها فيها جذران، جذر للعدد الأصلي وجذر للقسم المتبقي، والظاهرة تتحدث عن أعداد صحيحة ولذلك وجود جذور صحيحة للأعداد ذات الصلة في المعادلة ضروري.

الخاصة الثانية:

الأعداد (الجذور) والتي تربيعها يحقق الظاهرة تأتي على شكل سلسلة من الأعداد المتتالية وذلك بشرط أن تحقق الخاصة الأولى.

مثال:

أ) 13 ,12 ,11 ,10 ,9 ,8 ,7 حيث تربيعها عدد ثنائي أو ثلاثي المنزلة.

ب) 109,... ,93 ,92 ,91 حيث تربيعها عدد سداسي أو سباعي المنزلة.

ت) 1031,... ,970 ,969 حيث تربيعها عدد ثماني أو تساعي المنزلة.

تفسير هذه الخاصة يعود إلى الظاهرة نفسها.

$$\sqrt{[x][y]} = x + \sqrt{y}$$

كما ذكرنا أعلاه، لتحقق الظاهرة يجب أن يكون للقسم المتبقي من جذر العدد جذر صحيح، وفي حال نظرنا إلى الأعداد التي تحقق الظاهرة وجذورها أعدادا صحيحة نجدها مربعات متتالية، مثلا: 16، 25، 36، 49، 64... وعندها نجد أنّ جذورها هي: 4، 5، 6، 7، 8... وهي أعداد متتالية، وبالتالي تكون الأعداد $x + \sqrt{y}$ التي تحقق الظاهرة أعدادا متتالية.

الخاصة الثالثة:

بمتوالية الأعداد المتتالية التي تحقق الصفة المطلوبة، إذا كَبُر الجذر بـ 1، فإنّ القسم الملائم له في تربيعه يكبر ب 2.

أمثلة موجودة في جدول 10:

جدول 10: عندما يكبر الجذر بـ 1 يكبر القسم الملائم له في تربيعه بـ 2

جذر العدد	العدد	القسم الملائم (x)	القسم المتبقي (y)
7	49	4	9
8	64	6	4
9	81	8	1
10	100	10	0
11	121	12	1
12	144	14	4
13	169	16	9

<u>الخاصة الرابعة:</u>

العدد الذي يحقق الظاهرة $\sqrt{[x][\mathrm{y}]} = x + \sqrt{\mathrm{y}}$ هو عدد زوجي، أما العدد الذي يحقق الظاهرة $\sqrt{[x][\mathrm{y}]} = x - \sqrt{\mathrm{y}}$ فهو عدد فردي.

ننظر أولا إلى العدد الذي يحقق الظاهرة $\sqrt{[x][\mathrm{y}]} = x + \sqrt{\mathrm{y}}$.

يمكن التوصل إلى المعادلة التالية (توصلنا لها سابقا، انظر أعلاه):

$$\mathrm{x} \cdot 10^{\mathrm{m}} = \mathrm{x}^2 + 2 \cdot \mathrm{x} \cdot \sqrt{\mathrm{y}}$$

حيث أن m هي عدد خانات العدد y. نقسم على x (وهو عدد صحيح لا يساوي صفر)

$$10^{\mathrm{m}} = x + 2\sqrt{\mathrm{y}}$$
$$x = 10^{\mathrm{m}} - 2\sqrt{\mathrm{y}}$$

نريد أن نجد عدد خانات العدد x.

عدد خانات العدد 10^{m} هو m+1، لذا يكون عدد خانات العدد $10^{\mathrm{m}} - 2\sqrt{\mathrm{y}}$ هو m+1-1 أي m. عدد الخانات يقل بـ 1، لأن طرح عدد معين من عدد آخر مع أصفار يقلل عدد الخانات. عدد الخانات يقل بأكثر من 1 عندما نطرح من العدد عددا أكبر من تسعة أعشاره (في حالتنا $9 \cdot 10^{\mathrm{m}-1}$). بما أن أكبر قيمة للعدد $2\sqrt{\mathrm{y}}$ هي $2\sqrt{9 \cdot (10^{m-1} + 10^{\mathrm{m}-2} + \cdots + 1)}$ وهذا العدد أقل $2\sqrt{9 \cdot m \cdot 10^{m-1}}$ ، وهذا بالتأكيد أصغر من $9 \cdot 10^{\mathrm{m}-1}$.

لذلك عدد خانات x هو m، أي أن عدد خانات العدد [y][ ] هو 2m، وهو عدد زوجي.

بنفس الصورة نبرهن الحالة عندما $\sqrt{[x][y]} = x - \sqrt{y}$.

الخاصة الخامسة:

الجذور التي تربيعها يحقق الظاهرة موجودة حول عدد مع أصفار:

مثال: الجذور 13 ,12 ,11 .10 ,9 ,8 ,7

في المثال السابق العدد مع أصفار هو 10 وعدد الأعداد بعده التي تحقق الظاهرة يساوي عدد الأعداد قبله والتي تحقق الظاهرة. وذلك ينتج من التبسيط الجبري للظاهرة:

$$\sqrt{[x][y]} = x + \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x \cdot 10^{m} + y} = x + \sqrt{y}$$

$$x \cdot 10^{m} + y = x^2 + 2x\sqrt{y} + y$$

$x \cdot 10^{m} = x^2 + 2x\sqrt{y}$ / نقسم على x (وهو عدد صحيح لا يساوي صفر)

$$10^{m} = x + 2\sqrt{y}$$

10^{m}هو عدد مع أصفار لذا تكون الأعداد المحققة للظاهرة حول هذا العدد، وذلك بالاعتماد أيضا على الخاصة الثانية.

الخاصة السادسة:

عدد الأعداد التي تحقق الظاهرة الموجودة على جهتي العدد مع أصفار يساوي الجذر التربيعي لأكبر عدد مكون من نفس عدد خانات القسم المتبقي من مربع العدد .

مثال:

لننظر إلى الأعداد الجذور ذات 4-5 أرقام والتي تحقق الظاهرة، معروف أن هذه الأعداد ستظهر حول العدد 10000 وتربيعها سيظهر حول العدد 100000000. القسم المتبقي من مربع العدد مكون من أربعة أرقام، ولذلك نستطيع القول أن عدد الأعداد التي تحقق الظاهرة المتواجدة حول 10000 يساوي: $\sqrt{9999}$ =99 ، لذا سيكون أول زوج أعداد يحقق الظاهرة هو الزوج ($(9901)^2$,9901) وأخر زوج هو الزوج ($(10099)^2$,10099).

وبهذا نكون قد وصفنا طريقة لإيجاد جميع الأعداد التي تحقق الظاهرة التي اهتممنا بها.

كما ذكرنا أعلاه، لتحقق الظاهرة يجب أن يكون للقسم المتبقي من جذر العدد جذر صحيح، وقد رأينا في خاصة 2 أن جذور هذه الأعداد متتالية. تظل الظاهرة تتحقق للجذور المتتالية عندما يظل القسم المتبقي ذا نفس عدد المنازل m. أي تظل الجذور للأعداد التي تحقق الظاهرة متتالية حتى تصبح قيمة القسم المتبقي أكبر عدد مكون من نفس عدد خانات القسم المتبقي من مربع العدد.

ملاحظة على المثال المفصل:

أخذنا ظاهرة رياضية تبدو خاطئة، واستخدمنا استراتيجية ماذا لو لم يكن لتوسيع الظاهرة ولبناء عالم رياضي به علاقات رياضية مختلفة. في سبيل ذلك استخدمنا عدة استراتيجيات حل وتعليل. من هذه الاستراتيجيات استخدام أمثلة، بناء جداول، البحث عن نماذج عددية، استخدام نظريات في علم الأعداد، إلخ.

عبر المثال المفصل أردنا أن نظهر كيف أن حالة رياضية خاصة يمكن أن نبني منها، بواسطة استخدام استراتيجية طرح أسئلة، عالما رياضيا مثيرا لاهتمام الطلاب. يمكن أن نطلب من الطلاب أن يعملوا بمجموعات لكي يسهل عليهم معالجة المسألة، كما يمكن أن نطلب منهم استخدام التكنولوجيا لصنع ذلك، كما استخدمنا نحن الجداول الإلكترونية.

خاتمة:

عرضنا في هذا المقال استراتيجية خاصة لطرح المشكلات في صف الرياضيات كطريقة لتعليم وتعلم الرياضيات. رأينا ميزات مختلفة لاستخدام هذه الاستراتيجية، كما رأينا فوائد هذا الاستخدام. هذه دعوة إذا إلى استخدام استراتيجية "ماذا لو لم يكن" كأداة لإثارة دافعية الطلاب لتعلم الرياضيات وكذلك لتعميق هذا التعلم. هذا المقال يساعد معلمي الرياضيات في فعل ذلك، وخصوصا أنه يعرض عدة فعاليات يمكن للمعلم أن يستخدمها. ويرجى أن تصبح الاستراتيجية إحدى استراتيجيات تعليم معلم الرياضيات وعندها يمكنه تطوير فعاليات ملائمة بنفسه.

References:

Akay, H. & Boz, N. (2010). The effect of problem posing oriented analyses -II Course on the Attitudes toward Mathematics and Mathematics Self-Efficacy of Elementary Prospective Mathematics Teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, 35(2), 59-75.

Brown, S. I. & Walter, I. (1990). *The art of problem posing (2nd ED).* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1993). Problem posing in mathematics education. In S. I. Brown & M. I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and application* (pp. 16-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

English, L. D. (1997a). Children's Reasoning Processes in Classifying and Solving Computational Word Problems. In L. D. English (Ed.) *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images* (pp. 191-220). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

English, L. D. (1997b). Promoting a Problem-Posing Classroom. *Teaching Children Mathematics*, 4, 172-179.

English, L. D. (1998). Children's Problem Posing within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*, 83-106.

Kar, T., Özdemir, E., Ipek, A. S. & Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 1577-1583.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical problem solving*, (pp.12-148). New York: Academic Press.

Kontorovich, I.; Koichu, B.; Leikin, R. & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior,31*(1), 149-161.

Lavy, I. & Bershadsky, I. (2003). Problem Posing via "What if not?" strategy in Solid Geometry - A Case Study. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22* (4) 369-387.

Lavy, I. & Shriki, A. (2005). Assessing professional growth of pre-service teachers using comparison between theoretical and practical image of the 'good teacher'. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME), III* (pp. 233-240). Melbourne, Australia.

Lavy, I. & Shriki, A. (2007). Posing problem as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. In J.H. Woo; H.C. Lew; K.S. Park &, D.Y. Seo (Eds). *Proceedings of the 31th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), III* (pp.129-136).

Leung S. S., & Silver, E. A. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal*, *9* (1), 5-24.

Perrin, J. R. (2007). Problem posing at all levels in the calculus classroom. *School Science and Mathematics*, *107* (5), 182-188.

Pittalis, M., Christou, C.; Mousoulides, N. & Pitta-Pantazi, D. (2004). A structural model for problem posing, *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*

Education (PME), IV, (pp. 49-56). http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR058_Pittalis.pdf

Shriki, A. (2008). Assisting Teachers to Develop Their Students' Creativity in Mathematics- Implementing the "WHAT-IF-NOT?" Strategy. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of The 5th International Conference: Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*, (pp. 410-411). Haifa, Israel, February 24-28, 2008.

Silver, E. A. (1997). Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Thinking in Problem Posing. *ZDM, 29* (3), 75-80.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14* (1), 19-28.

Song, S., Yim, J., Shin,E. & Lee, H.(2007). Posing Problems with Use the `What If Not?' Strategy in NIM Game. . In J.H. Woo; H.C. Lew; K.S. Park &, D.Y. Seo (Eds). *Proceedings of the 31th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), IV* (pp.193-200). Seoul.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education, 25,* 166–175.

ملحق 1:

برهان الادعاء: شرط تحقق الظاهرة الرياضية المطروحة هو ان يكون الفرق بين العدد a والعدد المناسب له في تربيعه يساوي الجذر التربيعي للجزء المتبقي من مربع العدد.

تتحقق الظاهرة عندما:

$$[\text{العدد المناسب}]+\sqrt{[\text{الجزء المتبقي}]}=\sqrt{[\text{العدد المناسب}][\text{الجزء المتبقي}]}$$

حيث العدد a يساوي: $[\text{العدد المناسب}]+\sqrt{[\text{الجزء المتبقي}]}$

لذلك: الفرق بين العدد والعدد المناسب له في تربيعه هو:

$$[\text{العدد المناسب}]+\sqrt{[\text{الجزء المتبقي}]} - [\text{العدد المناسب}] = \sqrt{[\text{الجزء المتبقي}]}$$

وهو المطلوب برهانه.

ملحق 2:

الأعداد الجذر التي تربيعها يحقق الظاهرة تأتي في أعداد متتالية. تتحقق الظاهرة عندما:

$[x]+\sqrt{[y]}=\sqrt{[x][y]}$ حيث العدد يساوي: $[x]+\sqrt{[y]}$

"What if not"? Strategy

The concept, meaning, types, and functions in math instruction

Wajeeh Daher, Ahlam Anabosi and Rawan Anabosi

Abstract:

In this article we present a problem posing strategy called 'What if not' strategy. We start by describing the general strategy of problem posing, and then proceed to describe the types of this strategy, including the 'What if not' strategy. Afterwards, we describe the characteristics and advantages of using the strategy in the mathematics classroom, including what other researchers found regarding these advantages for students' learning of mathematics. We then proceed to present mathematical examples that can be used with the 'What if not' strategy in the different school stages. Afterwards, we give a detailed example on the use of the strategy in a specific mathematical phenomenon. Hopefully, this article would encourage mathematics teachers to use the strategy in order to make their students interested in mathematics, as well as to make these students' learning of mathematics deeper and richer.