جامعة 16 (2012/1434)، 54-3

جيوجبرا في صف الرياضيات

أحلام عنبوسي، وجيه ضاهر ونمر بياعة

أكاديمية القاسمي

تلخيص:

برنامج جيوجبرا هو برنامج حاسوبي حديث نسبيا لتعليم وتعلم الرياضيات، وهو مصدر مفتوح، بمعنى أن إمكانيات تطويره وفقا لحاجاتنا كبيرة جدا. من ناحية أخرى، برنامج جيوجبرا يمَكن الطلاب من استكشاف مواضيع رياضية مختلفة (هندسة، جبر، حساب التفاضل والتكامل، إلخ)، وذلك بطريقة ديناميكية ومستقلة، وهذا يشجع الطلاب على تعلم الرياضيات ويزيد من دافعيتهم لهذا التعلم. هذا المقال يحاول أن يعرض إمكانيات برنامج جيوجبرا المختلفة، كبرنامج تكنولوجي يمكن أن يكون أداة بيد معلم الرياضيات تساعده على عرض الأفكار الرياضية بصورة ديناميكية وبصرية، بحيث يسهم بشكل كبير في عملية تعلم الطلاب للرياضيات، وبالتالي يزيد من تحصيلهم به.

يبدأ المقال بعرض خلفية نظرية عن برنامج جيوجبرا كأداة تربوية في صف الرياضيات، ثم يعرض إمكانيات البرنامج، ثم مبناه، وبعدها المصادر التكنولوجية التي يعتمد عليها، ومن ثم بدايات هذا البرنامج وتاريخه، وينتقل إلى عرض فوائده، وأخيرا يصف المقال فعاليات رياضية لمراحل مدرسية مختلفة يستكشف من خلالها الطالب علاقات رياضية مهمة وذلك بمساعدة برنامج جيوجبرا. هذا المقال بالتالي يمكن أن يُستفاد منه في برامج إعداد المعلمين في كليات التربية المختلفة، وكذلك يمكن أن يساعد معلمي الرياضيات في المراحل المختلفة على إدخال التكنولوجيا، وبشكل خاص جيوجبرا، إلى صف الرياضيات. هو إذا دعوة إلى استغلال الإمكانيات التكنولوجية والتربوية الكبيرة المتوفرة في برنامج جيوجبرا في تعليم وتعلم موضوع الرياضيات الذي يعمل الكثيرون على محاولة تقريبه للطلاب، لكي يصبح موضوعا محببا لديهم يقبلون على تعلمه وفي جعبتهم أداة تساعدهم على التعامل معه واستكشافه.

مقدمة

برنامج جيوجبرا هو برنامج حاسوبي حديث نسبيا لتعليم وتعلم الرياضيات، وقد أخذ استعماله في صف الرياضيات ينتشر بصورة كبيرة وذلك لسهولة الوصول إليه، فهو متوفر في عدة صور، منها الإنترنتي (Online)، ومنها غير المتصل بالإنترنت (Offline)، كما أن البرنامج معدّ بصيغتين: للكبار (المرحلة ما فوق الابتدائية) وللصغار. هذا الانتشار يعود أيضا إلى كون البرنامج أداة مساعدة للطلاب ليستكشفوا العلاقات الرياضية، وذلك عن

طريق تمثيلات مختلفة ومن أهمها الجبري والهندسي، ومن هنا اسم البرنامج. هذه الإمكانيات للبرنامج تجعله أداة ذات إمكانيات واسعة في صف الرياضيات. هذا المقال معني بتبيان إمكانيات جيوجبرا المختلفة كأداة لتعلم وتعليم الرياضيات، والحاجة إلى هذا المقال واضحة، فبرنامج جيوجبرا ما زال في بدايات استخدامه، والمعلمون بحاجة إلى مصدر ثري يرشدهم إلى إمكانياته وفوائده وأنواع الفعاليات المختلفة التي يمكن القيام بها باستخدامه.

يبدأ المقال بعرض خلفية نظرية عن برنامج جيوجبرا كأداة تربوية في صف الرياضيات، ثم يعرض إمكانيات البرنامج، ثم مبناه، وبعدها المصادر التكنولوجية التي يعتمد عليها، ومن ثم بدايات هذا البرنامج وتاريخه، وينتقل إلى عرض فوائده، وأخيرا يصف المقال فعاليات رياضية لمراحل مدرسية مختلفة يستكشف من خلالها الطالب علاقات رياضية مهمة وذلك بمساعدة برنامج جيوجبرا. المقال إذا هو من المقالات التي تعني بالجانب النظري والتطبيقي للأدوات التكنولوجية كأدوات تربوية، ومبناه الذي وصفناه سابقا يشبه مبنى مقالات تُعنى بهذين الجانبين، حيث بعضها اهتم بمبنى البرنامج وفعاليات ملائمة له (مثلا: Barnard & Stols, 2009)، وبعضها اهتم بإعطاء خلفية نظرية بسيطة ثم فعاليات (مثلا: Lindner ,2009). نحن ارتأينا أن نهتم بجوانب أخرى لبرنامج جيوجبرا، مثل إمكانياته وتاريخه، وكذلك رأينا أن نكتب ونوسع قليلا من الخلفية النظرية، ثم نعرض الفعاليات. هكذا يمكن أن يستفيد منه الباحث في استخدام التكنولوجيات في التربية الرياضية وفي نفس الوقت معلم الرياضيات في مراحل التعلم المختلفة.

خلفية نظرية: برنامج جيوجبرا كأداة تربوية في صف الرياضيات

جيوجبرا هي برنامج تفاعلي يهدف إلى مساعدة الطلاب من جيل 10 حتى 18 ومعلميهم في صف الرياضيات، وهو يقدّم أمكانيات جبرية من خلال حقل جبري، مثلا بواسطة إدخال معادلات بصورة مباشرة (Hohenwarter & Fuchs, 2004). هوهينوارتر وفيش (2004) وسَّعا لاحقاً مراحل التعلم الملائمة لاستخدام الجيوجبرا حتى المرحلة الجامعية. سهولة الدمج بين الهندسة والجبر من خلال جيوجبرا يجعل جيوجيرا منصة ملائمة للربط بين هذين الموضوعين الرياضيين المهمين، وفي نفس الوقت الربط بين المرئي والرمزي، وهما

جانبان رياضيان مهمان ويساهمان في توصل طالب الرياضيات إلى فهم عميق للعناصر والعمليات الرياضية. جونكاجا وماجهيروفا (Guncaga & Majherova ،2012) يقترحان استخدام برنامج جيوجبرا لربط الرياضيات مع المعلوماتية ومع مواضيع أخرى. إمكانية هذا البرنامج ربط مواضيع رياضية ومواضيع هندسية تجعله أداة ممكنة لتعميق معرفة الطلاب الرياضية (NCTM, 2000; Noss, Healy, & Hoyles, 1997). الإمكانيات التربوية المختلفة لجيوجبرا لتعلم الرياضيات يمكن رؤيتها من خلال الأبحاث التربوية المختلفة التي تعالج دور برنامج جيوجيرا في تعلم الطلاب (انظروا مثلا Dikovic، 2009). هذه الإمكانيات التربوية لبرنامج جيوجبرا إن هي إلا مثال على الإمكانيات التربوية لبرامج الرياضيات الدينامية بشكل عام، هذه البرامج التي تؤثر إيجابا على تعلم الطلاب Goldin & Shteingold, 2001; Zbiek, Heid, Blume & Dick, 2007).

باحثون مختلفون وصفوا إسهام جيوجبرا في تربية الرياضيات، حيث أشاروا إلى تأثير استخدام برنامج جيوجبرا الإيجابي على تحصيل الطلاب الرياضي Saha, Ayub, &) Tarmizi, 2010; Zengin, Furkan & Kutluca, 2012). زينجين، فاركان وكاتلوكا (2012، Zengin, Furkan & Kutluca) فحصوا تأثير برنامج جيوجبرا، كأداة دينامية لتعلم الرياضيات، على تحصيل الطلاب في المثلثات. عينة البحث تكونت من 51 طالبا، حيث 25 منهم شاركوا في المجموعة التجريبية، بينما 26 شاركوا في المجموعة الضابطة. المجموعة التجريبية استخدمت برنامج جيوجبرا في الدروس، بينما المجموعة الضابطة تعلمت بطريقة مبنوية. البيانات التي جمعت خلال 5 أسابيع من التعلم أظهرت أن هناك فرقا ذا دلالة إحصائية لصالح المجموعة التجريبية في تحصيل الطلاب في موضوع المثلثات بين المجموعتين التجريبية والمجموعة الضابطة. ساها، أيوب وترميزي (2010، Saha, Ayub & Tarmizi)، من ناحية أخرى، وجدوا أنه لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية في تحصيل الطلاب ذوي المقدرة الفراغية البصرية العالية بين المجموعة التجريبية التي تعلمت الهندسة مستخدمة برنامج جيوجبرا وبين المجموعة الضابطة التي تعلمت الهندسة بدون استخدام البرنامج، ولكنهم وجدوا أن هناك فرقا ذا دلالة إحصائية في تحصيل الطلاب ذوي المقدرة الفراغية البصرية المنخفضة بين المجموعة التجريبية التي تعلمت الهندسة

مستخدمة برنامج جيوجبرا وبين المجموعة الضابطة التي تعلمت الهندسة بدون استخدامه. ويمكن تفسير التأثير الإيجابي لاستخدام برنامج جيوجبرا على تحصيل الطلاب بأن هذا البرنامج يشجع الطلاب على الانخراط في عملية تعلمهم ويشجعهم على استخدام حواس أكثر في تعلمهم (Reisa, 2010).

اهتم الباحثون اهتماما خاصا باسهام جيوجبرا في فهم الطلاب الرياضي وتعميق هذا الفهم. آدمز وميلينبورغ (Adams & Muilenburg ،2012) يصفان التكنولوجيا بأنها تدعم تعلم الطلاب بسبب إمكانياتها البصرية وأدواتها التي تساعد الطلاب على اكتشاف العلاقات الرياضية. ويضيف الكاتبان أن برنامج جيوجبرا يمكن أن يكون أداة في صفوف الرياضيات الثانوية كوسيلة لدعم تعلم الطلاب وتحسين تعلمهم. بشكل محدد أكثر، بايازيت واكسوي (Bayazit & Aksoy ،2010) يقولان إن استخدام برنامج جيوجبرا يدعم المفاهيم المبنوية والإجرائية للدوال، وبهذا فهو يساعد على توضيح المعرفة الفعلية التي لها علاقة بأنظمة المعادلات، وكذلك يساعد على بناء نماذج بيانية لحل مشاكل جبرية. جونكاجا وماجهيروفا (Guncaga and Majherova ،2012) يجادلان أن الطلاب يطورون خيالهم الهندسي من خلال العمل مع جيوجبرا، مما يساعدهم على تطوير قدراتهم لاستكشاف الأشكال الهندسية وصفاتها، وكذلك لاستكشاف الصفات الهندسية المجردة من العناصر الخاصة، وكذلك تساعد جيوجبرا الطلاب على تعميق إدراكهم للأشكال الهندسية والعلاقات بينها (ص. 46).

أهمية الجيوجبرا في تعليم وتعلم الرياضيات جعلت الباحثين في التربية الرياضية يقترحون فعاليات ملائمة لتعلم مواضيع رياضية مختلفة بواسطة جيوجبرا وذلك للمراحل المدرسية المختلفة (أنظروا مثلا Gittinger ، 2012). آخرون أظهروا كيف يمكن استخدام جيوجبرا في فعاليات رياضية، وذلك بهدف فهم مفاهيم ومواضيع رياضية، مثلا لتبسيط العناصر الرياضية وتوضيح العلاقات بينها (أنظروا مثلا Frenzen، 2011; Garber & Picking، 2010). جاربر وبيكينغ (2010) يقترحان جيوجبرا كوسيلة مساعدة لتعلم مفاهيم الرسم البياني، الميل، الميل الثابت، الميل المتغير والتحويلات. أهمية برنامج جيوجبرا في

تعليم وتعلم الرياضيات جعلت المربين يجعلونه عنصرا من عناصر تحضير المعلمين ما قبل الخدمة الذين يتعلمون الرياضيات في كليات إعداد المعلمين (أنظروا مثلا & Carter Ferrucci، 2009).

إمكانيات جيوجبرا:

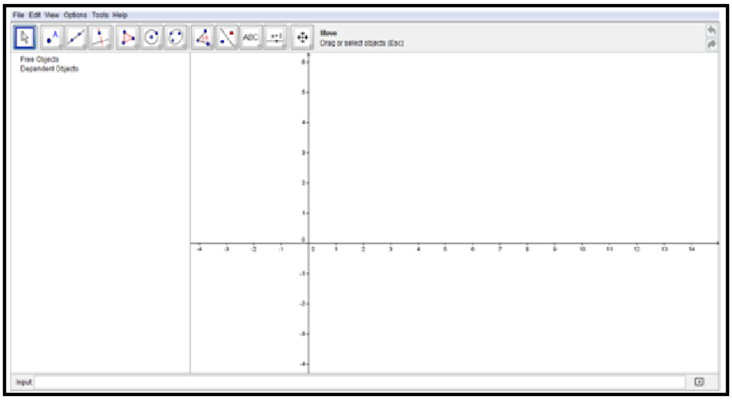
يمكن النظر لجيوجبرا كأداة ذات إمكانيات مختلفة. يصف اوغويل (Ogwel, 2009) ثلاث إمكانيات رئيسية لجيوجبرا:

- أداة تمثيل وعرض: تمثيل جبري، تمثيل هندسي، تمثيل عددي، تمثيل دينامي وربط بين التمثيلات.
- أداة للنمذجة: أبنية دينامية، وتعلم عن طريق الاكتشاف والتجربة.
- أداة كتابة: بناء ومشاركة في المواد في المجتمع الإنترنتي، والبحث العلمي حول التعلم والتعليم باستخدام جيوجبرا.

هذه الإمكانيات تمكّن المعلم من تنويع تعليمه وتنويع التمثيلات الرياضية التي يتعرّض لها طلابه، كما تمكّن الطالب من مشاركة زملائه في إنتاجه وحلّ مشاكل رياضية بشكل جماعي.

مبنى برنامج جيوجبرا كأداة تكنولوجية لتعليم وتعلم الرياضيات:

يبين الشكل واجهة برنامج جيوجبرا.



شكل 1: واجهة برنامج جيوجبرا

هناك 3 حقول أساسية في برنامج جيوجبرا: البياني - الهندسي وهو في القسم الأيمن والأعلى، حقل إدخال البيانات وهو في القسم الأسفل، والحقل الجبري وهو في القسم الأيسر والأعلى. بالإضافة إلى ذلك هناك أدوات بناء هندسية في الأعلى. هذه الأدوات تمكن من بناء عناصر هندسية مختلفة: أنواع مختلفة من النقاط (نقطة بشكل حر، نقطة على كائن، نقطة والتي هي تقاطع كائنين، إلخ)، أنواع مختلفة من الخطوط (مستقيم، شعاع، قطعة، إلخ)، أنواع مختلفة من الخطوط التي تحقق شرطا معينا (مستقيم عامودي، مستقيم مواز، منصف زاوية، إلخ)، مضلعات (مضلعات بشكل حر، مضلعات منتظمة، إلخ)، دوائر وأقواس وقطاعات (دائرة مع مركز معين ونقطة على المحيط، دائرة مع مركز ونصف قطر، إلخ)، منحنيات أخرى (قطع مكافئ، قطع ناقص، قطع زائد، شكل مخروطي مع 5 نقاط)، عناصر مع قياسات أو قياسات (زاوية ذات قياس معطى، قياس زاوية، قياس قطعة، إلخ)، تحويلات (انعكاس، دوران، إزاحة).

برنامج جيوجبرا يوفر أيضا أدوات تحكم يمكن للطالب أن يستعملها للتحكم في عمله الرياضي. هذه الأدوات هي: أداة تحريك (تمكن من تحريك شكل عبر نقطة والتي هي كائن حر)، أدوات إدخال (نص، صورة، إلخ)، أدوات تقنية - أزرار (شريط مرور، صندوق إظهار أو إخفاء كائن رياضي، إلخ)، أدوات تحكم بمشهد الواجهة (تكبير، تصغير، إخفاء كائن أو رمز، إلخ).

مهم أن نذكر أن برنامج جيوجبرا يمكن من إظهار شباك جدول إلكتروني، وكذلك شباك بياني- هندسي آخر، وبهذا يوسع من إمكانيات العمل الرياضي لدى الطالب، مثلا الجدول الإلكتروني يُمكن من تمثيلات عددية تساعد الطالب على رؤية جوانب إضافية للعناصر الرياضية، وبذلك تتعمق معرفته بها.

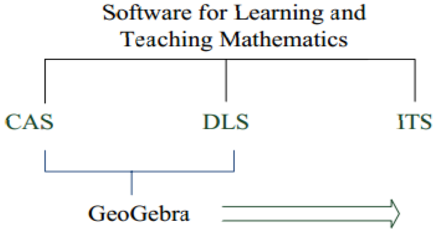
المصادر التكنولوجية التي يعتمد عليها برنامج جيوجبرا:

يشير مارتينوفيتش، كاراداج وفريمان (Martinovic, Karadag & Freiman, 2010) أن الأدبيات التي كتبت عن استخدام تكنولوجيات الكمبيوتر في تدريس الرياضيات تقسم إلى قسمين: أدبيات تركز على استخدام الأنظمة الحاسوبية الجبرية (CAS - Computerized

(Algebra Systems)، مثل مابل (Maple) وديرايف (Derive)، وهي تقوم بعمليات حسابية رقمية وعمليات جبرية تسهل عملية الفهم النظري للطالب، وهناك أدبيات تركز على استخدام أنظمة التعلم الدينامية (DLS - Dynamic Learning Systems)، مثل جيوجبرا (GeoGebra)، وكابري (Cabri)، وهي توفر للمستخدمين بيئات تعلم مناسبة لاستكشاف المفاهيم الرياضية والعلاقات بينها.

أشار الباحثان كاراداج وفريمان (أعلاه) أن النوعين المذكورين من البرامج الحاسوبية الرياضية كلاهما يمكن من تجريب وتنفيذ معظم المفاهيم الرياضية، إلا أنهما لم يعدا لنفس الأهداف، فالأنظمة الحاسوبية الجبرية تمنح فرصة سهلة لتنفيذ العديد من الحسابات الرياضية والمهام الرقمية والرمزية، أما أنظمة التعلم الدينامية فقد وضعت لتلبية الاحتياجات التعليمية المتعلقة أساسا باختلاف أساليب التعلم والفهم للرياضيات، ولذلك فهي تهتم بالتمثيلات الرياضية المختلفة وتمكن الطالب، بواسطة إمكانيات متعددة كالجر مثلا، من استكشاف العلاقات الرياضية المختلفة. برنامج جيوجبرا ينتمي بصورة أكبر إلى أنظمة التعلم الدينامية والتي توفر للمستخدمين فرصة لإنشاء كائنات رياضية، معالجة هذه الكائنات، ومراقبة التغيير في ملامحها في الوقت المناسب. من هذا المنظور، يمكن للمرء أن ينظر أيضا إلى الجيوجبرا كأداة تعلم تدعم الأنشطة المعرفية وبالتالي توسيع القدرات المعرفية للمستخدمين عن طريق السماح لهم باستغلال بيانات متعددة وميزات استكشافية.

هناك من ينظر إلى برنامج جيوجبرا كمكمل لكلا النوعين أعلاه وأنه في الطريق إلى أن يكون منظومة تعليم ذكية (Intelligent Tutoring System - ITS)، كما في شكل 1 والذي مصدره مارتينوفيتش، كاراداج وفريمان (Martinovic, Karadag & Freiman, 2010).

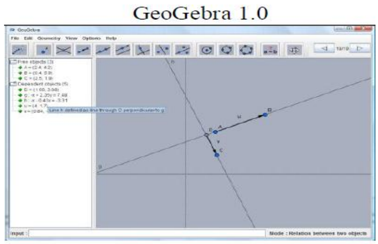
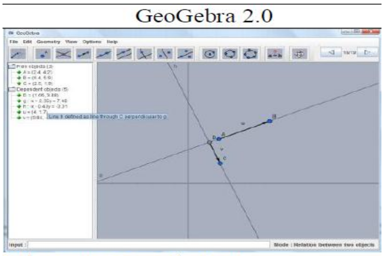
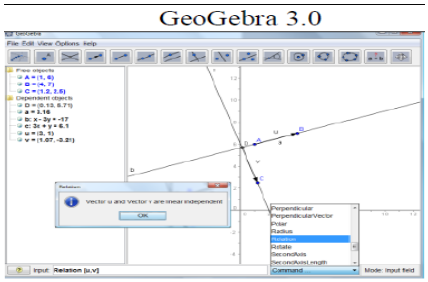
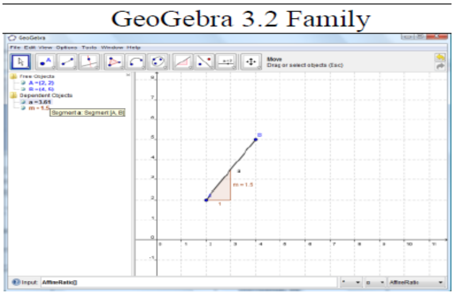


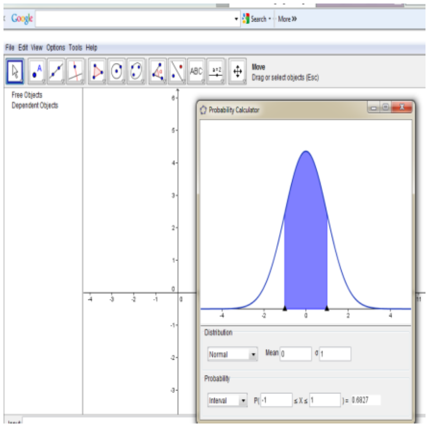
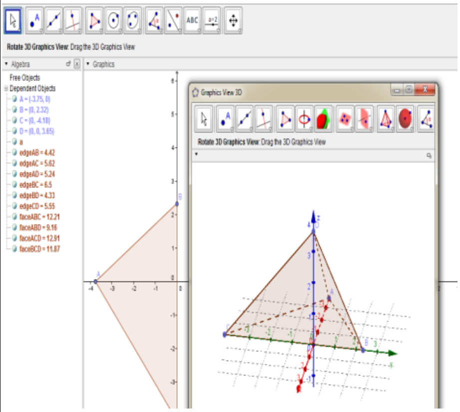
شكل 2: مكان جيوجبرا بين البرامج الحاسوبية الرياضية

تاريخ برنامج جيوجبرا وتطوره:

أنشئ برنامج جيوجبرا في سنة 2002 من قبل ماركوس هوهنوارتر (Markus Hohenwarter)، ومنذ إصداره الأول وهو يشهد تحسنا كبيرا في شكله وقدرته. هذه التحسينات تظهر من إصدار إلى آخر، والجدول 1 يبين الإصدارات وصفاتها والتحسينات التي طرأت عليها، كما في مارتينوفيتش، كاراداج وفريمان (2010).

جدول 1: جيوجبرا في مرآة التحسينات

Release: January 28th, 2002 - الكائنات المتاحة: نقطة، متجه، مستقيم، مخروط، زاوية، عدد. - تمتلك "نظرة هندسية" معينة بجانب لوحة الجبر. - تبنى الإنشاءات بواسطة الفأرة. - فيها مجموعة محددة من أوامر لوحة المفاتيح. - متوفرة باللغتين الإنجليزية والألمانية.	Release: January 9th, 2004 - الكائنات المتاحة: نقطة، متجه، مستقيم، مخروط، زاوية، عدد. - تركز على الهندسة (بما في ذلك التحويلات والهندسة التحليلية (بما في ذلك هندسة المخروطيات والمتجهات). - وظيفية حسابية محدودة. - تتيح 43 أمرا (بما في ذلك دالة المنطق if). - متوفرة بالإنجليزية والألمانية.
Release: March 23rd, 2009 - الكائنات منظمة بحسب أنواعها: النقاط، المستقيمات، المضلعات.	Release: January 24, 2010 تتيح الجداول. - القدرة على تنظيم البيانات الإحصائية وعرضها.

- تعزيز وظيفية الحساب (حساب المساحة، المجموع الأصغر، نقطة الالتواء، الجذر، المتواليات...) أوامر جديدة مثل: المساحة، الانحناء. تتيح 85 أمر. - متوفرة بـ 39 لغة.	- تعمل مع المصفوفات والمحددات. - أوامر جديدة مثل: معامل ذي الحدين، إدراج، - عكس، تبديل. - متوفرة ب 39 لغة.
Geogebra 4  - يسهل عملية مشاركة الملفات عبر الإنترنت (من قائمة الملفات – file). - واجهة المستخدم: جر وإسقاط، رسم منظوري وسهولة الوصول. - أدوات جديدة: تحليل البيانات، آلة حاسبة للاحتمال، فاحص دوال. - نسخ ولصق، مشهدان للرسم البياني. - أداة نصية محسنة، عرض معادلات أفضل. - اختيارات ملء بالفقس والصور. - حركة نقاط على خطوط، نهايات ديناميكية لشرائط المرور والمحاور. - أزرار، مربعات إدخال، برمجة. - التصدير إلى صور Gif متحركة. - 50 لغة.	Geogebra 5 قيد التجربة  أدوات جديدة: إنشاء منشور، مجال، عرض أمام. كائنات ثلاثية الأبعاد (نقاط، خطوط، متجهات، دوائر، مضلعات). أوامر تدعم كائنات ثلاثية الأبعاد. أوامر جديدة مثل: تقاطع (لإظهار نقاط التقاطع للكائنات المختلفة).

ميزات وفوائد استخدام جيوجبرا في تعلم وتعليم الرياضيات:

التفت الباحثون في دور التكنولوجيا في تربية الرياضيات لفوائد برنامج الجيوجبرا كأداة تعلم للرياضيات. توجد أدناه بعض هذه الفوائد. أوجويل (Ogwel، 2009)، ديكوفيك (Diković, 2009)، وكراداك وماكدوجال (Karadag & McDougall ،2009a ،2009b) ذكروا الفوائد التالية لاستخدام برنامج جيوجبرا في تعلم الرياضيات.

1. يحسّن مهارات التفكير العالية.
2. يمكن من تصوّر العناصر الرياضية.
3. يساعد على تمثيل العناصر والعلاقات الرياضية بشكل ديناميكي.
4. يساعد المتعلم على الربط بين التمثيلات الرياضية المختلفة.
5. يمكن من تعميم العلاقات الرياضية عبر الاكتشاف والتجربة.
6. يوسع من مدى العناصر الرياضية التي يستطيع الطالب استكشافها، مثلا الدوال المختلفة التي يمكن للطالب التعرف على صفاتها.
7. يساعد في خلق مواقف يرى بها الطلاب ضرورة التعلم، وخصوصا عندما يرى المتعلم تعدد التطبيقات الحياتية التي يمكن حلها بواسطة جيوجبرا.
8. يحفز المعلمين على دمج التكنولوجيا في التعليم بسبب سهولة استخدامها ولأنه يستطيع أن ينوع اساليب تعليمه بواسطة هذا الاستخدام.

فعاليات وتطبيقات رياضية باستخدام الجيوجبرا:

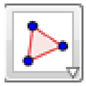
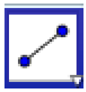
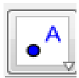
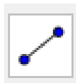
أدناه نصف فعاليات وتطبيقات رياضية مختلفة يمكن القيام بها باستخدام برنامج جيوجبرا في مراحل التعليم المختلفة وخصوصا المرحلة الابتدائية والمرحلة الإعدادية.

جيوجبرا والتعاريف البديلة:

يمكن استخدام برنامج الجيوجبرا لتوعية الطلاب بالنسبة لأهمية التعاريف البديلة في الرياضيات بشكل عام وفي الهندسة بشكل خاص، نفعل ذلك أدناه بالنسبة لمصطلح المثلث.

نطلب من الطلاب أولا بناء مثلث بمساعدة جيوجبرا بالطريقة التي يريدون ونسألهم عن تعريف المثلث حسب الطريقة التي اختاروها. جدول 2 يبين التعريفات التي يمكن أن نتوصل لها مع الطلاب بعد نقاش صفي في كل حالة من حالات بناء مثلث حسب جيوجبرا.

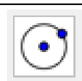
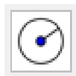
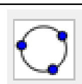
جدول 2: تعريفات المثلث بالاعتماد على العمل في جيوجبرا

الخيار	التعريف
	المثلث هو مضلع ذو ثلاثة أضلاع.
	المثلث هو الشكل الناتج عن ثلاث قطع مستقيمة، لا تكون أي اثنتين منها على استقامة واحدة، بداية كل منها هي نهاية القطعة التالية.
 ثم 	المثلث هو الشكل الناتج عن 3 نقاط في المستوى ليست على استقامة واحدة والقطع التي تصل بينها.

جيوجبرا وصفات الأشكال:

يمكننا أيضا أن نتعرف على صفات الأشكال من الخيارات المختلفة لرسمها. مثلا بالنسبة للدائرة، الجدول 3 يبين الصفات المختلفة التي من الممكن ان نتوصل لها مع الطلاب حسب الخيار المختار.

جدول 3: صفات الدائرة بالاعتماد على العمل في جيوجبرا

الخيار	الصفة
	الدائرة تتحدد بنقطتين على المستوى، بحيث تثبت إحداهما وتتحرك الثانية حولها بنفس البعد.
	الدائرة تتحدد بنقطة ثابتة على المستوى ونقاط تبعد عنها نفس البعد.
	الدائرة تتحدد بثلاث نقاط في المستوى.

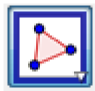
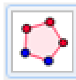
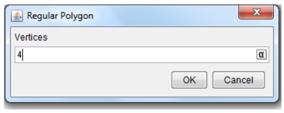
بناء مثلث متساوي الأضلاع:

إعداد:

سنقوم بإخفاء النافذة الجبرية والمحاور لأننا لسنا بحاجة لها. لإخفاء المحاور، ننقر على قائمة "العرض – View" في شريط القوائم وعندها ننقر على الإمكانية "محاور- Axes"، ولإخفاء النافذة الجبرية ننقر على "العرض" ثم على الإمكانية "النافذة الجبرية - Algebra".

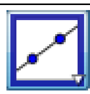
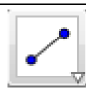
يمكن بناء مثلث متساوي الأضلاع باستخدام جيوجبرا بطريقتين. جدول 4 يبين الطريقة الأولى التي تعتمد تعريف المثلث على أنه مضلع منتظم.

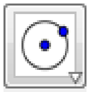
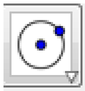
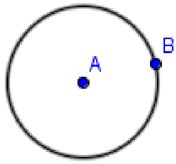
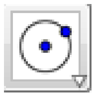
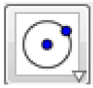
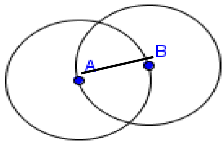
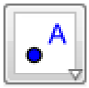
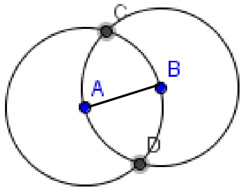
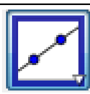
جدول 4: خطوات إنشاء مثلث كمضلع منتظم

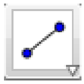
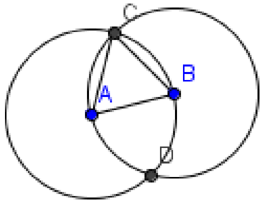
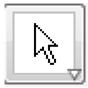
الخطوة	الخيار	العملية
1		نختار القائمة "مضلعات".
2		نختار الأمر "مضلع منتظم".
3		نرسم نقطتين ونكتب 3 كعدد النقاط للمضلع. ينتج مثلث متساوي الأضلاع.

جدول 5 يبين الطريقة الثانية التي تعتمد إنشاء المثلث بالاعتماد على الفرجار وحافة المسطرة.

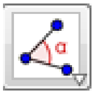
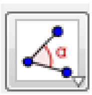
جدول 5: خطوات إنشاء مثلث متساوي الأضلاع بالاعتماد على الإنشاءات الهندسية

الخطوة	الخيار	العملية
رسم أحد أضلاع المثلث:		
1		نختار القائمة "مستقيمات".
2		نختار الأمر "قطعة مستقيمة".
3		ننقر على مكانين مختلفين في لوحة الرسم لإنشاء القطعة AB.

رسم الضلعين الآخرين بواسطة إنشاء دوائر نصف قطرها يساوي طول ضلع المثلث:		
4		نختار القائمة "دوائر وأقواس وقطاعات".
5		نختار الأمر "دائرة مع مركز من خلال نقطة".
6		ننقر على النقطة A وبعدها على النقطة B، فنحصل على دائرة مركزها النقطة A، ونصف قطرها AB، كما في الرسم.
7		نختار القائمة "دوائر وأقواس وقطاعات".
8		نختار الأمر "دائرة مع مركز من خلال نقطة".
9		ننشئ دائرة مركزها النقطة B (أحد رؤوس المثلث)، وتمر من النقطة A.
تعيين رأس المثلث الثالث:		
10		نختار القائمة "نقاط".
11		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
12		ننقر على الدائرة الأولى ثم على الدائرة الثانية، فتظهر لدينا نقطتا تقاطع الدائرتين. في الرسم هما C و D.
رسم المثلث متساوي الأضلاع:		
13		نختار القائمة "مستقيمات".

14		نختار الأمر "قطعة مستقيمة".
15		نصل بين النقطتين A و B، ثم بين كل منهما وإحدى النقطتين C أو D، لينتج مثلث متساوي الأضلاع. في الرسم هو المثلث ABC.
إخفاء العناصر غير المطلوبة		
16		نختار القائمة "تحريك". نختار الكائن الذي لا نريد أن يظهر في الرسم السابق. ننقر على كل كائن. ننقر بالفأرة على اليمين ونختار "أظهر الكائن". هكذا يختفي الكائن. بعد إخفاء كل العناصر الزائدة يبقى المثلث المتساوي الأضلاع.

فحص:

يمكن للطلاب أن يفحصوا مزايا المثلث بواسطة قياس أضلاعه وزواياه. يمكن قياس الزوايا بواسطة الأمر "قياس زاوية"  من القائمة "قياسات" . ويمكن قياس الأضلاع بواسطة الأمر "قياس قطعة"  من نفس القائمة.

بحث وبرهان:

يمكن أن نطلب من الطلاب البرهنة بشكل رياضي أن المثلث الذي حصلنا عليه متساوي الأضلاع.

ملاحظة: رأينا أنه يمكن رسم مثلث متساوي الأضلاع بجيوجبرا بطريقتين. الطريقة الأولى تبين تعريف مثلث متساوي الأضلاع كمضلع منتظم له 3 رؤوس، أما الطريقة الثانية فتؤدي بالطالب إلى اكتشاف البناء الهندسي وكيفية استخدامه في بناء أشكال هندسية ذات صفات خاصة.

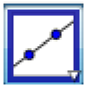
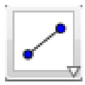
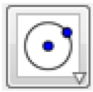
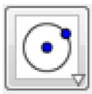
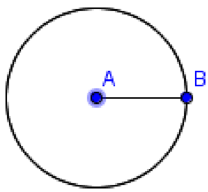
بناء مربع:

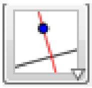
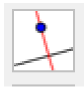
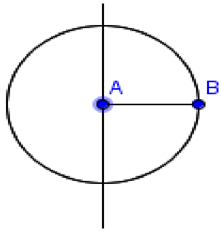
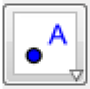
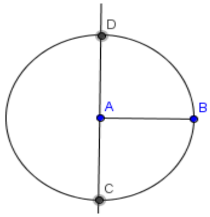
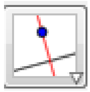
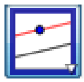
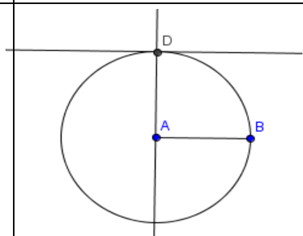
في هذا المثال سنقوم بمحاكاة عملية البناء بواسطة الفرجار والمسطرة، مستخدمين أداة **بناء دائرة**، أداة **بناء مستقيمات متوازية** وأداة **بناء مستقيمات متعامدة** لإنشاء مربع. الفكرة في عملية بنائنا هي أننا سنقوم بإنشاء دائرة نصف قطرها AB، ثم نقوم بإنشاء خطوط موازية ومعامدة لنصف القطر، وبذلك يتم بناء المربع.

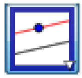
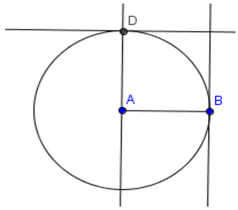
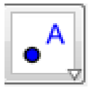
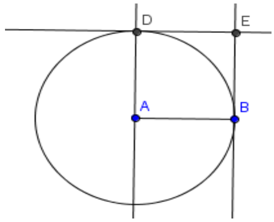
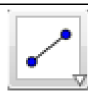
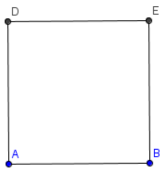
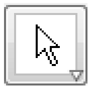
إعداد: انظروا التحضير لبناء مثلث متساوي الأضلاع

خطوات البناء مبينة في الجدول 6.

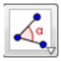
جدول 6: خطوات بناء مربع بالاعتماد على الإنشاءات الهندسية

الخطوة	الخيار	العملية
رسم أحد أضلاع المربع:		
1		نختار القائمة "مستقيمات".
2		نختار الأمر "قطعة مستقيمة".
3		ننقر على مكانين مختلفين في لوحة الرسم لإنشاء القطعة AB.
رسم ضلع آخر للمربع معامد للضلع الأول:		
4		نختار القائمة "دوائر وأقواس وقطاعات".
5		نختار الأمر "دائرة مع مركز من خلال نقطة".
6		ننقر على النقطة A وبعدها على النقطة B، فنحصل على دائرة مركزها النقطة A، ونصف قطرها AB، كما في الرسم.

7		نختار القائمة "مستقيمات ذات صفة خاصة".
8		نختار الأمر "مستقيم عمودي مار في نقطة".
9		نختار القطعة AB، فيظهر عمود نحركه حتى النقطة A.
تعيين رأس المربع الثالث:		
10		نختار القائمة "نقاط".
11		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
12		ننقر على الدائرة ثم على المستقيم المعامد فتظهر نقطتا تقاطع الدائرة مع المستقيم المعامد. في الرسم هما C و D.
رسم الضلعين الثالث والرابع للمربع:		
13		نختار القائمة "مستقيمات ذات صفة خاصة".
14		نختار الأمر "مستقيم موازي مار في نقطة" من القائمة أعلاه.
15		ننقر على القطعة AB ثم ننقر على النقطة D. ينتج مستقيم موازي للقطعة AB مار في النقطة D، كما في الرسم.

16		نختار الأمر "مستقيم موازي مار في نقطة" من القائمة "مستقيمات ذات صفة خاصة".
17		ننشئ مستقيما موازيا للقطعة AD ويمر في النقطة B.
تعيين رأس المربع الرابع:		
18		نختار القائمة "نقاط".
19		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
20		ننقر على المستقيمين المنشأين في الخطوتين 15 و 17، فتظهر نقطة تقاطعهما. في الرسم هي النقطة E.
تعيين المربع:		
21		نختار الأمر "قطعة مستقيمة".
		نصل بين النقطتين B و E، و بين النقطتين E و D، وبين النقطتين D و A.
إخفاء العناصر غير المطلوبة		
22		نختار القائمة "تحريك". نختار الكائن الذي لا نريد أن يظهر في الرسم السابق. ننقر على كل كائن. ننقر بالفأرة على اليمين ونختار "أظهر الكائن". هكذا يختفي الكائن. بعد إخفاء كل العناصر الزائدة يبقى المربع.

فحص:

يمكن للطلاب أن يفحصوا مزايا الشكل الناتج بواسطة قياس أضلاعه وزواياه. يمكن قياس الزوايا بواسطة الأمر "قياس زاوية"  من القائمة "قياسات" . ويمكن قياس الأضلاع بواسطة الأمر "قياس قطعة"  من نفس القائمة.

بحث وبرهان:

يمكن أن نطلب من الطلاب البرهنة بشكل رياضي أن الشكل الرباعي الذي حصلنا عليه هو مربع.

ملاحظة: يمكننا رسم المربع بطرق بنائية أخرى، مثلا بدلا من الخطوة الأخيرة التي رسمنا بها موازيا للمستقيم AD يمكننا رسم مستقيم عمودي على المستقيم AB في النقطة B.

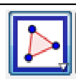
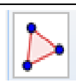
صفات المتوسطات في المثلث:

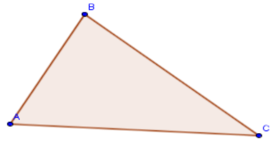
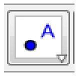
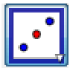
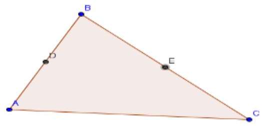
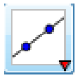
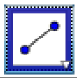
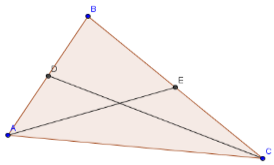
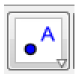
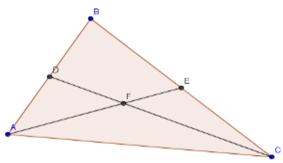
الأبلت الذي يُبنى في هذا المثال هدفه أن يرى الطلاب أن المتوسطات تلتقي في نقطة واحدة، وتقسم هذه النقطة المتوسطات بنسبة 2:1، بحيث أن القسم الأكبر من جهة الرأس.

يمكن للمعلم أن يبني متوسطين من متوسطات المثلث وتوجيه الطلاب لبناء المتوسط الثالث، ثم اكتشاف العلاقات الرياضية الملائمة.

ننشئ الأبلت بالطريقة المبينة في الجدول 7.

جدول 7: بناء متوسطات في المثلث وتحديد نقطة التقائها

الخطوة	الخيار	العملية
رسم مثلث:		
1		نختار القائمة "مضلعات".
2		نختار الأمر "مضلع".

3		ننقر على ثلاثة أمكنة مختلفة في لوح الرسم لتحديد رؤوس المثلث، ثم ننقر على أول رأس أنشأناه وذلك لإنشاء مثلث كما في الرسم.
تحديد نقطتين من نقاط منتصفات أضلاع المثلث المنشأ:		
4		نختار القائمة "نقاط".
5		نختار الأمر "منتصف أو مركز".
		ننقر على اثنين من أضلاع المثلث فنحصل على الشكل الذي يظهر في الرسم.
رسم اثنين من متوسطات المثلث المُنشأ:		
6		نختار القائمة "مستقيمات".
7		نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين".
8		نصل بين رأس المثلث A ونقطة الوسط للضلع الذي يقابله (النقطة E)، وذلك بواسطة النقر على احدى النقطتين ثم النقر على النقطة الأخرى. نفس العملية بالنسبة للرأس C. نحصل على الشكل المبين في الرسم.
تحديد نقطة التقاء المتوسطين:		
9		نختار القائمة "نقاط".
10		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
11		ننقر على المتوسط CD ثم على المتوسط AE فتظهر نقطة تقاطعهما في الرسم (النقطة F).

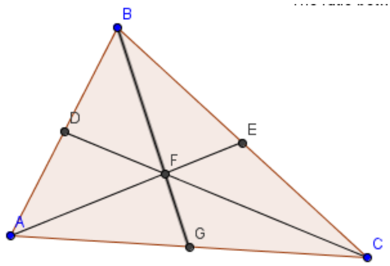
بحث وبرهان:

هناك هدفان للبحث: الأول أن يكتشف الطلاب أن المتوسطات الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة والثاني أن يكتشفوا أن هذه النقطة تقسم المتوسطات بنسبة 2:1.

بحث وبرهان أوّلان: المتوسطات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

نسأل: في أي نقطة التقى المتوسطان في الرسم؟ ماذا سيحدث باعتقادكم عند رسم المتوسط الثالث؟ هل سيمر من نفس النقطة؟

بعد نقاش الأفكار ووجهات النظر المختلفة، نرسم المتوسط الأخير وذلك بإنشاء قطعة من الرأس B للمثلث إلى منتصف الضلع AC (في شكل 3 هي النقطة G).



شكل 3: التقاء المتوسطات في مثلث

نسأل: على ماذا حصلتم؟ هل باعتقادكم أن التقاء المتوسطات في نقطة واحدة يقتصر فقط على المثلث الذي نحن بصدده؟ لنفحص مع مثلثات أخرى. نطلب من الطلاب أن يحركوا رؤوس المثلث ليحصلوا على أنواع مثلثات مختلفة. نسأل "ماذا نلاحظ؟"، مشجعين المناقشة والتفسير، ثم نتوصل معهم إلى التعميم.

في مرحلة تعليمية أعلى يمكن أن نطلب من الطلاب برهانا لهذه العلاقة، ويمكن أن نرشدهم إلى مبرهنة "سيفا" الموجودة في الكتب التعليمية.

بحث وبرهان تاليان: ميزات نقطة التقاء المتوسطات في المثلث.

نطرح السؤال "ما هي ميزات نقطة التقاء المتوسطات؟".

يمكن أن يساعدنا على استكشاف هذه الظاهرة ثلاثة أوامر موجودة في جيوجبرا (أمر كتابة نص، أمر إيجاد طول قطعة وأمر القسمة):

"The ratio between the sections of the Median ---= Segment --/ Segment --="+Segment[,] / + Segment[,]

هذه الأوامر مفصلة أدناه.

الأمر الأول هو أمر كتابة نص:

"The ratio between the sections of the Median ---= Segment --/ Segment --="

الأمر الثاني هو أمر إيجاد طول قطعة: +Segment[,]

الأمر الثالث هو أمر القسمة: نكتب هذا الأمر في شريط الإدخال بالنسبة لكل واحد من المتوسطات الثلاثة. مثلا بالنسبة للمتوسط AE نكتب :

"The ratio between the sections of the Median AE = Segment AF/ Segment FE ="+Segment[A,F] / + Segment[F,E]

عند كتابة هذه الأوامر لكل من المتوسطات الثلاثة في شريط الإدخال تظهر الجملة ونتيجة القسمة لكل متوسط في الحقل البياني.

نقوم بتحريك رؤوس المثلث لكي نحصل على أنواع مثلثات مختلفة. نسأل:"ماذا نلاحظ ؟"، مشجعين المناقشة والتفسير، حتى نتوصل معهم إلى التعميم.

يمكن الإشارة أيضا إلى أن الحقل الجبري في البرمجية يمكن أن يساعدنا في اكتشاف هذه العلاقة (إضافة لحقل إدخال البيانات الموجود أعلاه)، وذلك من خلال إدراج جدول ملائم (في geogebra) وقيام الطالب بالقياسات المتعلقة بأجزاء المتوسطات ومن ثم تدوينها في الجدول الملائم واكتشاف العلاقة ومن ثم التعميم من خلال تحريك رؤوس المثلث وملاحظة ما يطرأ على المعطيات في الجدول.

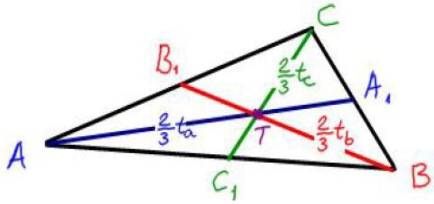
وهكذا نكون قد انتهينا من عملية الاكتشاف. ننتقل لنطلب من التلاميذ برهانا لهذه العلاقة الرياضية.

بناء مثلث بواسطة فرجار وحافة مسطرة فقط اذا عُلمت متوسطاته الثلاثة:

(بالاعتماد على فاهلبيرغ - ستوجانوفسكا وطريفونوف (Fahlberg-Stojanovska & Trifunov, 2010))

هنا يمكن الاستفادة من العلاقات السابقة حول المتوسطات في المثلث، وسنستخدم برنامج جيوجبرا كأداة بناء للمثلث المطلوب. بشكل محدد، المسألة هي: نريد أن نبني مثلثا بواسطة فرجار وحافة مسطرة فقط، اذا عُلمت لدينا متوسطاته الثلاثة (t_a,t_b,t_c).

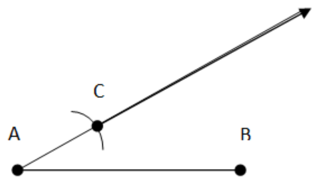
كما قلنا سابقا، سنعتمد في بنائنا على تعريف المتوسط (هو المستقيم الخارج من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل) وعلى حقيقة أن المتوسطات في المثلث تلتقي في نقطة واحدة (T) تقسم المتوسطات بنسبة 2:1 من جهة الرأس (انظروا الشكل 4).



شكل 4: التقاء المتوسطات في المثلث ونسب أجزاء كل منها عند نقطة التقائها

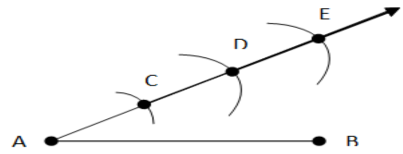
من أجل بناء هذا المثلث نحن بحاجة لأن نعرف كيف نثلث قطعة مستخدمين فرجارا وحافة مسطرة فقط. هذه الطريقة مفصلة في الخطوات التالية، على فرض أن القطعة هي AB.

- نقوم برسم خط مائل من النقطة A (بالطبع يمكننا البدء أيضاً من النقطة B).
- نفتح الفرجار فتحة مناسبة ونقوم بوضع رأس الفرجار على النقطة A، ثم نرسم قوسًا يتقاطع مع الخط المائل، ونحدد نقطة التقاطع C، كما في شكل التالي:



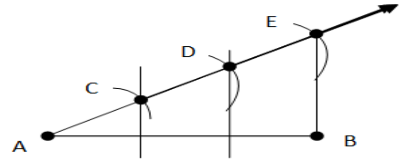
شكل 5: تثليث قطعة – اختيار قطعة بطول معين على مستقيم إضافي

- نضع رأس الفرجار على النقطة C وننشئ قوسا آخر، مع الحرص على إبقاء فتحة الفرجار دون تغيير، ثم نحدد نقطة تقاطع هذا القوس مع الخط المائل. نكرر هذه العملية مرة أخرى، كما في شكل 6:



شكل 6: إنشاء 3 قطع متتالية بنفس الطول على المستقيم الإضافي

- نرسم قطعة من النقطة E الى النقطة B.
- نرسم موازيا للخط BE من النقطة D وموازيا آخر من النقطة C، (يمكنك الدخول لموقع "مصدر الرياضيات المفتوح – Math Open Reference) لرؤية خطوات انشاء خط موازي بواسطة فرجار وحافة مسطرة)، كما في شكل 7:

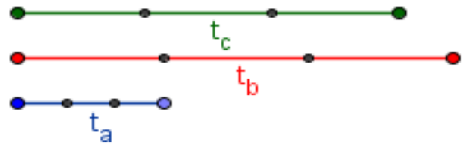


شكل 7: رسم موازيات بهدف تثليث القطعة الأصلية

هكذا نكون قد قسمنا القطعة إلى أثلاث (حسب تاليس - تشابه المثلثات).

بداية البناء بواسطة جيوجبرا:

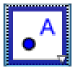
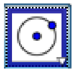
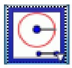
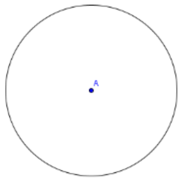
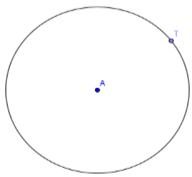
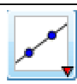
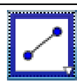
- في برنامج الجيوجبرا نقوم بإنشاء ثلاث قطع مستقيمة (t_a,t_b,t_c) ونقوم بتقسيمها إلى أثلاث بالطريقة التي ذكرت أعلاه. شكل 8 يصف ما نريد القيام به.

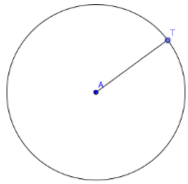


شكل 8: تثليث متوسطات المثلث

نبدأ برسم أحد رؤوس المثلث ورسم نقطة التقاء متوسطاته بواسطة فرجار وحافة مسطرة باستخدام الجيوجبرا. الجدول 8 يبين الخطوات الملائمة.

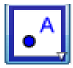
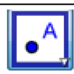
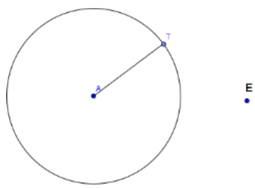
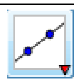
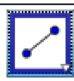
جدول 8: رسم أحد رؤوس المثلث ورسم نقطة التقاء متوسطاته بواسطة فرجار وحافة مسطرة، مستخدمين الجيوجبرا.

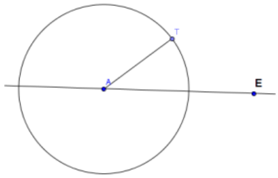
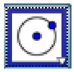
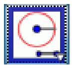
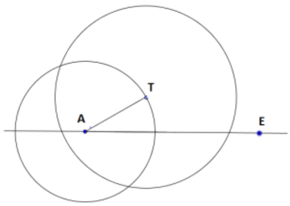
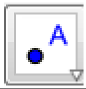
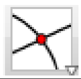
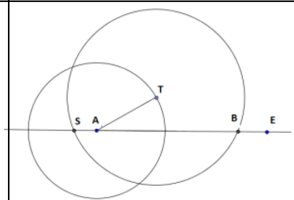
الخطوة	الخيار	العملية
رسم أحد رؤوس المثلث (الرأس A)		
1		نختار القائمة "نقاط".
2		نختار الأمر "نقطة جديدة". نرسم بواسطتها النقطة A (أحد رؤوس المثلث).
رسم نقطة التقاء المتوسطات: النقطة T. لاحظوا أن T هي نقطة تقع على محيط الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها يساوي ثلثي t_a.		
3		نختار القائمة "دوائر".
4		نختار الأمر "فرجار".
5		نرسم دائرة مركزها A و نصف قطرها ثلثا t_a (المتوسط الخارج من الراس A)، وذلك بالنقر على الطرف الأيسر للقطعة t_a وعلى النقطة التي تبعد بمقدار ثلثي t_a عن الطرف الأيسر، ثم ننقر على النقطة A.
6		نختار القائمة "نقاط".
7		نختار الأمر "نقطة جديدة".
8		نرسم النقطة T، يمكن أن تكون أي نقطة من النقاط الواقعة على محيط الدائرة.
إنشاء قطعة مستقيمة AT (طولها يساوي ثلثي المتوسط الخارج من النقطة A إلى الضلع BC):		
10		نختار القائمة "مستقيمات".
11		نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين".

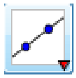
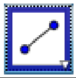
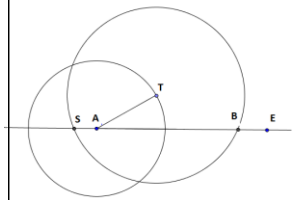
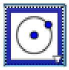
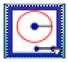
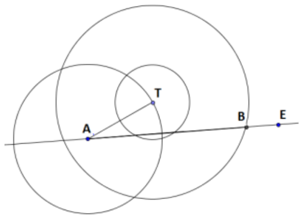
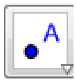
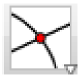
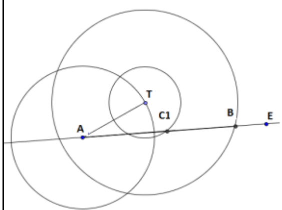
12		ننقر على مركز الدائرة A ثم على النقطة T.

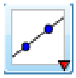
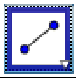
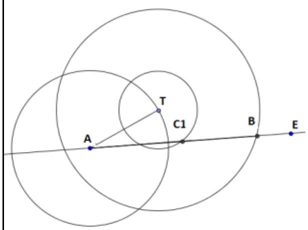
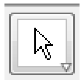
في هذه المرحلة لا يمكننا إنشاء عناصر أخرى (رؤوس أو نقاط وسط) بحيث نكون متأكدين من صحة هذا الإنشاء في المثلث، لذلك نبدأ بعملية استكشاف بواسطة الجيوجبرا. خطوة ضرورية في هذه المرحلة هي إنشاء ضلع متحرك للمثلث يمر من النقطة A. جدول 9 يري خطوات القيام بذلك، بالإضافة إلى خطوات تحديد رأس ثان للمثلث موجود على ضلعه وتحديد منتصف الضلع.

جدول 9: إنشاء ضلع متحرك لمثلث معروف أحد رؤوسه ونقطة التقاء متوسطاته وتحديد رأسه الثاني ومنتصف الضلع

الخطوة	الخيار	العملية
إنشاء "ضلع متحركة" للمثلث يمر من النقطة A (أحد رؤوس المثلث) ومن نقطة حرة E.		
1		نختار القائمة "نقاط".
2		نختار الأمر "نقطة جديدة".
3		ننقر على أي مكان في لوحة الرسم وذلك لرسم النقطة E.
4		نختار القائمة "مستقيمات".
5		نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين".

الخطوة	الخيار	العملية
6		ننقر على النقطة A وثم على النقطة الجديدة E، فنكون قد أنشأنا الضلع المتحرك للمثلث المُراد بناؤه. يمكن تغيير مكان هذا الضلع بواسطة النقر على الأيقونة  وجر النقطة E.
رسم الرأس الثاني للمثلث (النقطة B): لاحظوا أن رأس المثلث B ونقطة الوسط الملائمة C_1 يجب أن يقعا على الخط المستقيم المُنشأ أعلاه، ونحن نعلم كم يبعد كل منهما عن نقطة إلتقاء المتوسطات T.		
7		نختار القائمة "دوائر".
8		نختار الأمر "فرجار".
9		نرسم دائرة بحيث يكون نصف قطرها مساويا لثلثي t_b، وذلك بواسطة النقر على أيقونة الفرجار ثم على الطرف الأيسر للقطعة t_b والنقطة التي تبعد بمقدار ثلثي t_b عن الطرف الأيسر، ثم ننقر على النقطة T (تكون قيمة نصف قطر الدائرة ثلثي المتوسط t_b، ومركز الدائرة النقطة T).
10		نختار القائمة "نقاط".
11		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
12		ننقر على نقطة تقاطع المستقيم AE وهذه الدائرة، وهكذا نكون قد حددنا الرأس الثاني (B) للمثلث.
رسم أحد أضلاع المثلث: AB		

الخطوة	الخيار	العملية
13		نختار القائمة "مستقيمات".
14		نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين".
15		نرسم قطعة مستقيمة من النقطة A حتى النقطة B. تشكل هذه القطعة ضلعا من أضلاع المثلث.
رسم منتصف الضلع AB: النقطة C1		
16		نختار القائمة "دوائر".
17		نختار الأمر "فرجار".
18		نرسم دائرة بحيث يكون نصف قطرها مساويا لثلث t_C، وذلك باستعمال نقاط موجودة على t_C ونقطة المركز T (كما فعلنا في مراحل سابقة، مثلا الخطوة 9 في هذا الجدول).
19		نختار القائمة "نقاط".
20		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
21		ننقر على المستقيم AE ثم على الدائرة فتظهر النقطة C_1 كنقطة تقاطع هذه الدائرة والمستقيم AE.
رسم القطع AC_1,C_1B.		

الخطوة	الخيار	العملية
22		نختار القائمة "مستقيمات".
23		نختار الأمر "قطعة مستقيمة محددة بنقطتين".
24		ننقر على النقطة A ثم على النقطة C_1 لإنشاء القطعة AC_1. وننقر على النقطة C_1 ثم على النقطة B لإنشاء القطعة C_1B.
25		نخفي الدوائر في الرسم لنسهل العمل، وذلك عن طريق النقر بزر الفأرة الأيمن على محيط الدائرة ثم اختيار الأمر "أظهر الكائن".

نحن ما زلنا نستكشف، هذا ليس بالضرورة البناء المطلوب وإن كان يبدو صحيحا. السؤال هو: كيف يمكننا أن نحرّك موضع النقطة E بحيث يصبح البناء صحيحا؟ لكي نفعل ذلك مهم أن نتذكر أنه حسب تعريف المتوسط يجب أن تكون النقطة C_1 منتصف الضلع AB. وهذا قد لا يتحقق في الوضع الحالي للنقطة E، حيث يمكن أن نرى من الحقل الجبري أن AC_1 قد لا يساوي C_1B. لذا علينا أن نحرك النقطة E بحيث تتساوى القطعتان المذكورتان.

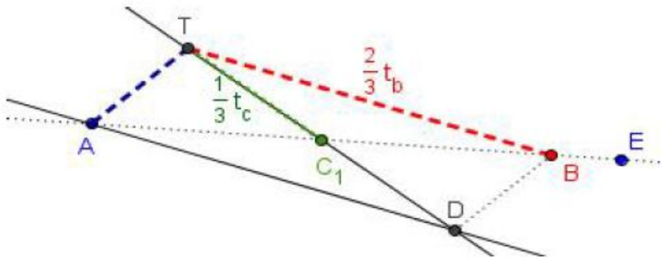
مهم هنا أن يتناقش الطلاب في الشرط الذي إن تحقق يمكن بناء المثلث. النقاش سوف يظهر لهم أننا إذا قمنا بتحديد مكان أحدى النقطتين: B أو C_1 فإنه يمكننا بناء المثلث المطلوب. هذا صحيح لأننا إذا قمنا بتحديد مكان النقطة C_1 مثلا، سيكون بإمكاننا أن ننشئ قطعة مساوية للقطعة AC_1 على امتداد هذه القطعة مما يجعلنا نحدد مكان الرأس B. كذلك نستطيع تحديد مكان الرأس C عن طريق إنشاء قطعة مساوية لضعف القطعة TC_1 وعلى استقامتها.

من ناحية أخرى، إذا قمنا بتحديد مكان النقطة B فإنه يمكننا أن نجد نقطة الوسط C_1.

مما سبق تنبع أهمية السؤال: كيف يمكننا تحديد مكان النقطة C_1 أو B مباشرة؟

حين يناقش المعلم قضية تحديد إحدى النقطتين المذكورتين مفضل أن يفعل ذلك بطرح أسئلة موجهة للطلاب. سؤال مهم هو: هل بإمكاننا تعيين نقطة D بحيث تكون النقطة C_1 منتصف قطري متوازي الأضلاع ADBT؟

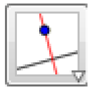
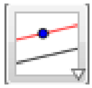
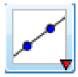
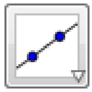
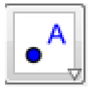
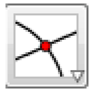
الشكل 9 يوضح الفكرة للطلاب.



شكل 9: D كرأس من رؤوس متوازي أضلاع

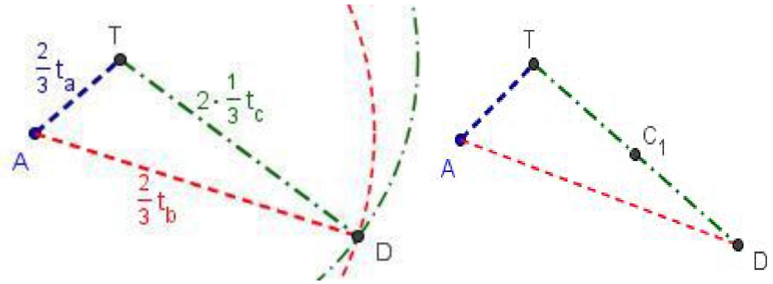
إحدى إمكانيات الإجابة على السؤال مبينة في جدول 10.

جدول 10: تعيين نقطة D بحيث تكون النقطة C1 منتصف قطري متوازي الأضلاع ADBT

الخطوة	الخيار	العملية
1		نختار القائمة "مستقيمات ذات صفة خاصة".
2		نختار الأمر "مستقيم مواز"، ونرسم خطا موازيا للضلع TB عبر النقطة A.
3		نختار القائمة "مستقيمات".
4		نختار الأمر "مستقيم بين نقطتين"، ونمد خطا يمر في T و C_1.
5		نختار القائمة "نقاط".
6		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين". ننقر على المستقيم الموازي وعلى المستقيم TC_1، فنحصل على النقطة D.

ولكن ما فعلناه لم يكن باستخدام الفرجار وحافة المسطرة فقط، ولذلك علينا أن نستفيد من استكشافنا السابق لنرسم النقطة D باستخدام الأداتين السابقتين فقط. هذا هو إذا موضوع نقاشنا التالي مع الطلاب، ونريد أن نتوصل معهم أن بإمكاننا أن نرسم النقطة D كنقطة تقاطع دائرة مركزها النقطة A ونصف قطرها يساوي ثلثي t_b ودائرة مركزها النقطة T ونصف قطرها هو ضعف القطعة TC_1 ، أي أن نصف قطرها هو ثلثا t_c. من ناحية أخرى، C_1 هي منتصف القطعة TD، لذا بإمكاننا أن نرسم النقطة C_1 بطريقة شبيهة لرسمنا النقاط التي تقسم قطعة إلى أثلاث، كما فعلنا أعلاه. رسم C_1 يكفينا لبناء المثلث.

نعود لبنائنا السابق بواسطة جيوجبرا، حيث حصلنا على النقطتين A وT. الآن نريد أن ننشئ النقطة D، ثم النقطة C_1 لكي نحصل على بناء كما في شكل 10.



شكل 10: رسم D و C_1 بجيوجبرا محاكين العمل بفرجار وحافة مسطرة

بعد تحديد مكان النقطة C_1 نستطيع بسهولة، كما ذكرنا سابقا، إكمال عملية بناء المثلث.

نتائج البناء السابق باستخدام جيوجبرا:

أحد الأمور الرائعة في جيوجبرا هو أنها ديناميكية، ما يجعلنا قادرين على اختبار البناء في العديد من الحالات. في هذه الحالة ولأن البناء واحد يمكننا أن نختبر بعض القضايا الرياضية المهمة، مثلا:

- هل المثلث ثابت؟

باستخدام جيوجبرا يمكننا أن نرى أن المثلث وبناءنا كله يتغيران مع تغيير المعطيات. هذا يعني أننا إن قمنا بتغيير أطوال t_a, t_b, t_c يتغير المثلث تلقائيا.

- ما هي الشروط التي يجب أن تتحقق من أجل أن يتكون مثلث؟

هل يختفي المثلث ومتى؟

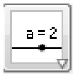
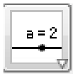
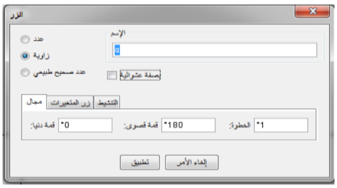
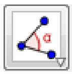
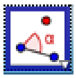
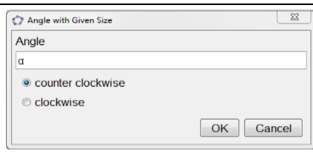
إذا قمنا بمد أحد المتوسطات بحيث يكون طوله أكبر من مجموع الآخرين سيختفي المثلث! هذا يعني أن هناك شروطا لوجود المثلث. يمكننا أن نتناقش مع الطلاب عن سبب الاختفاء. نقارن ما حصلنا عليه مع الشروط التي يجب أن تحققها أضلاع المثلث حتى يتكون المثلث (مجموع كل ضلعين أكبر من الضلع الثالث). وعلى الطلاب أن يستنتجوا أن مجموع كل متوسطين يجب أن يكون أكبر من طول المتوسط الثالث.

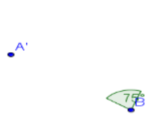
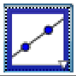
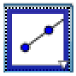
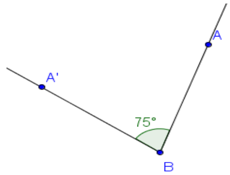
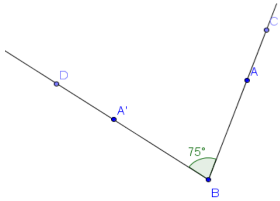
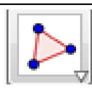
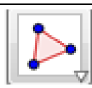
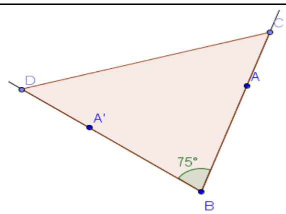
هذا المثال يري كيف يمكن للطلاب أن يقوموا باستكشاف ديناميكي ليوسعوا فهمهم بشكل كبير وواضح لعمليات البناء بواسطة الفرجار وحافة المسطرة. قيام الطلاب ببناءات كهذه ينمي قدرتهم على التحليل ونقاش نتائج عملهم.

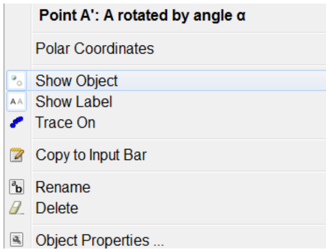
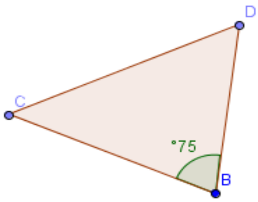
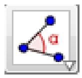
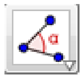
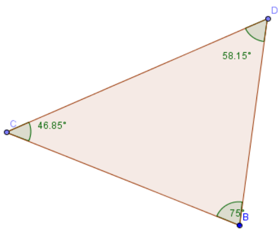
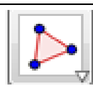
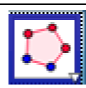
مساحة الأشكال المُنشأة على أضلاع مثلث ما:

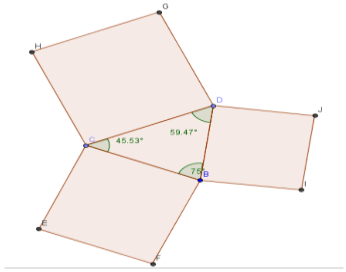
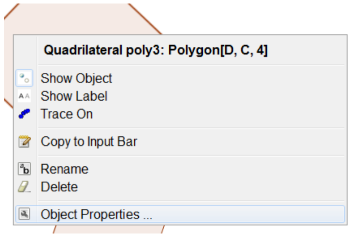
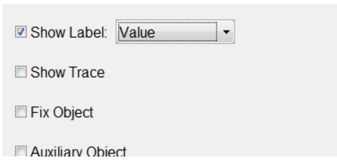
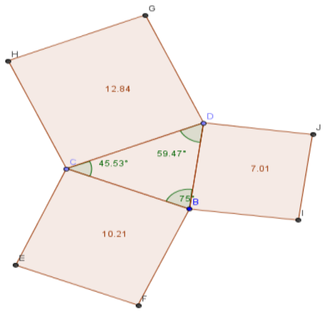
سنبحث بواسطة جيوجبرا علاقة هندسية مختلفة عن العلاقات التي بحثناها سابقا، وهي العلاقة بين مساحة الأشكال المُنشأة على أضلاع مثلث ما. بداية سنبحث الحالة التي يكون فيها الشكل المنشأ على أضلاع المثلث مربعا. جدول 11 يبين خطوات رسم هذه الحالة.

جدول 11: رسم مثلث عام وإنشاء مربعات على أضلاعه

الخطوة	الخيار	العملية
إنشاء شريط تمرير من نوع زاوية (الشريط α)، للتحكم في نوع المثلث الناتج		
1		نختار القائمة "أزرار".
2		نختار الأمر "زر المتغيرات".
3		ننقر على مكان مناسب في لوح الرسم لإنشاء هذا الشريط، ثم نحدد نوعه كزاوية ثم قيمته القصوى ب 180 درجة ثم ننقر على تطبيق.
إنشاء زاوية مرتبطة بالشريط المُنشأ أعلاه:		
4		نختار القائمة "زوايا".
5		نختار الأمر "زاوية ذات قياس معلوم".
6		ننقر على مكانين مختلفين في لوح الرسم، فتظهر نافذة نحدد فيها أن هذه الزاوية متعلقة بشريط التمرير α.

الخطوة	الخيار	العملية
7		بعد القيام بهذه الخطوات سيظهر لنا 3 نقاط سنبني المثلث بالاعتماد عليهن.
		نختار القائمة "مستقيمات".
		نختار الأمر "شعاع مار من نقطتين".
		نرسم ضلعي الزاوية، الأول يكون بالنقر على النقطة B فالنقطة A، أما الثاني فيكون بالنقر على النقطة B فالنقطة A' .
إنشاء مثلث متعلق بالزاوية المُنشأة:		
8		نختار القائمة "نقاط".
9		نختار الأمر "نقطة جديدة".
10		نرسم نقطتين على ضلعي الزاوية المنشأة بحيث تكون النقطة الأولى على الضلع الأول والنقطة الثانية على الضلع الثاني. في الرسم على اليمين هاتان النقطتان هما: C و D.
11		نختار القائمة "مضلعات".
12		نختار الأمر "مضلع".
13		ننقر على نقطة رأس الزاوية B ثم على النقطتين اللتين رسمناهما أعلاه: D و C، ثم ننقر ثانية على النقطة B.

الخطوة	الخيار	العملية
14		نقوم بإخفاء النقطة A والنقطة 'A. والشعاعين، وذلك بالنقر بزر الفأرة الأيمن على كل واحد من هذه الكائنات واختيار الأمر "إظهار الكائن".
		بعد القيام بالبند السابق نحصل على الشكل الذي يظهر في الرسم.
اظهار قيم زوايا المثلث:		
15		نختار القائمة "زوايا".
16		نختار الأمر "زاوية".
17		نظهر قيمة الزاوية C وذلك بالنقر على النقطة B، النقطة C، ثم النقطة D بالتوالي. نظهر قيمة الزاوية D وذلك بالنقر على النقطة C، النقطة D، ثم النقطة B بالتوالي.
إنشاء مربع على كل ضلع من أضلاع المثلث:		
18		نختار القائمة "مضلعات".
19		نختار الأمر "مضلع منتظم".

الخطوة	الخيار	العملية
20		لإنشاء مربع على الضلع BD ننقر على النقطة B ثم على النقطة D . نكرر هذه العملية للضلعين الآخرين مع الاهتمام بأن يكون ترتيب النقاط باتجاه عقرب الساعة وذلك للحفاظ على جمالية الرسم المُنشأ.
21		نظهر مساحة المربعات المُنشأة بجانب الشكل في لوح الرسم. ننقر بزر الفأرة الأيمن على كل من المربعات ونختار الأمر "مزايا الشكل".
22		نختار القائمة "إظهار العلامة" ثم نختار الأمر "قيمة"، وننقر على الأمر "إغلاق".
23		نقوم بهذه العملية لكل من المربعات الثلاثة.

بحث واكتشاف وبرهان:

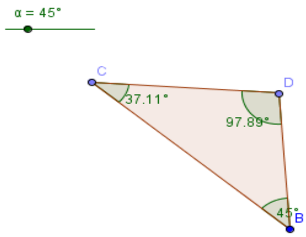
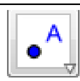
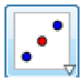
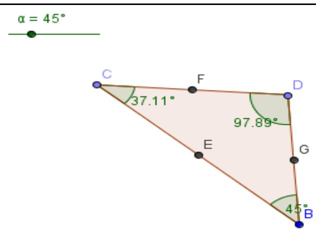
نغير قيم زوايا المثلث بحيث نحصل على مثلث حاد الزوايا، مثلث قائم الزاوية ومثلث منفرج الزاوية. نسأل في كل مرة: ما هي العلاقة بين مساحة المربعات الثلاثة؟

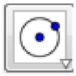
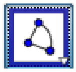
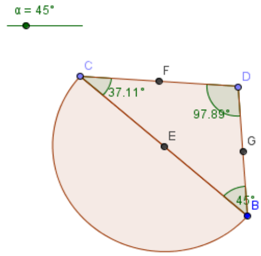
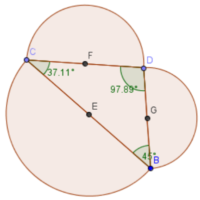
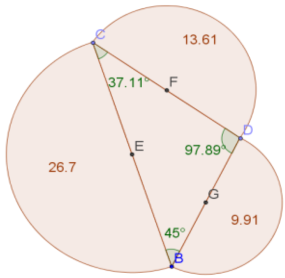
بعد أن يكتشف الطلاب العلاقات المختلفة الملائمة لكل مثلث من أنواع المثلثات الثلاثة أعلاه، نطلب منهم أن يبرهنوها. يمكننا أيضا أن نطلب منهم البحث عن هذه العلاقات

وتاريخها في الإنترنت أو في كتب علمية، بحيث يكتشفون بأن حالة تساوي مساحة مربع مع مجموع مساحتي مربعين اكتشفت من قبل الشعوب القديمة وبرهنت على يد العالم فيثاغورس وتدعى على اسمه: نظرية فيثاغورس.

نريد أن نثير تفكير الطلاب للبحث والاكتشاف ولتحقيق فهم أعمق للظاهرة، فنسأل:ماذا لو لم يكن الشكل المُنشأ مربعا؟! يمكننا عندها أن نبحث الحالة التي يكون فيها الشكل المُنشأ على أضلاع مثلث ما نصف دائرة. الجدول 12 يبين خطوات فعل ذلك بواسطة جيوجبرا.

جدول 12: العلاقة بين مساحات أنصاف الدوائر المُنشأة على أضلاع مثلث

الخطوة	الخيار	العملية
إنشاء مثلث متعلق بزاوية:		
1		نكرر الخطوات (1-17) التي قمنا بها في الجدول السابق.
إنشاء أنصاف دوائر على أضلاع المثلث		
أولا: تحديد نقاط المركز لأنصاف الدوائر المُراد إنشاؤها:		
2		نختار القائمة "نقاط".
3		نختار الأمر "منتصف أو مركز".
4		ننقر على كل ضلع من أضلاع المثلث.

الخطوة	الخيار	العملية
إنشاء أنصاف الدوائر:		
5		نختار القائمة "دوائر".
6		نختار الأمر "قطاع دائري محدد بمركز ونقطتين".
7		ننشئ نصف دائرة على الضلع BC وذلك بالنقر على النقطة E، ثم على النقطة C، وأخيرا على النقطة B.
8		ننشئ نصف دائرة على الضلع CD وذلك بالنقر على النقطة F، ثم على النقطة D، وأخيرا على النقطة C. نفعل ذلك أيضا بالنسبة للضلع DB.
10		لكي نظهر مساحات أنصاف الدوائر التي أنشأناها على أضلاع المثلث، نكرر العمليات 22-21 المذكورة في الجدول السابق بالنسبة لكل واحدة من أنصاف الدوائر المُنشأة.

بحث واستكشاف:

نمُر بنفس المراحل التي مررنا بها سابقا، أي الحالات المختلفة للمثلث (حاد، منفرج، قائم الزاوية). نسأل في كل مرة عن العلاقة بين مساحات الأشكال المُنشأة على الأضلاع. نستطيع

بواسطة أدوات جيوجبرا أن نستكشف العلاقة بالنسبة لأشكال أخرى مُنشأة على أضلاع مثلث، مثل مثلث متساوي الأضلاع.

حل هيئة معادلات خطية:

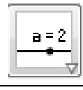
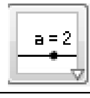
تدّعي ديكوفيك (Dikovic, 2009) بأنه عن طريق إتباع نهج الأسئلة المطروحة أدناه، يمكن للمعلم أن يرشد طلابه لفهم عميق لمعنى وطبيعة الحلول لهيئة المعادلات الخطية. هذه الأمثلة تساعد الطلاب في تذويت مفاهيم مهمة خاصة بالمعادلات الخطية عن طريق عملية اكتشاف بواسطة جيوجيرا. ولكن قبل ذلك، ينبغي على المعلم تعريف المصطلحات "معادلات متكافئة"، "معادلات غير متكافئة"، "حل واحد"، "لا يوجد حل"، "يوجد ما لا نهاية من الحلول"، "معادلة خطية"، "هيئة معادلات خطية"، "هيئة معادلات غير خطية".

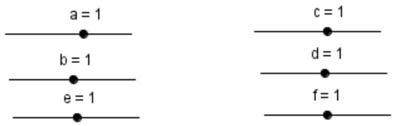
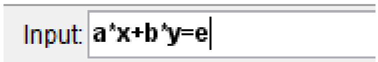
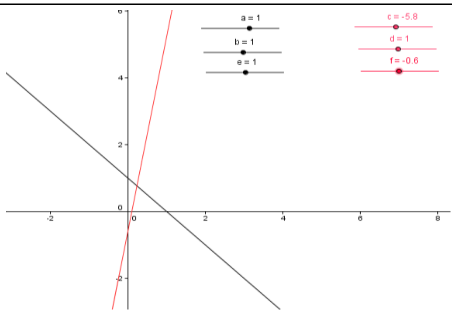
معالجة حلول هيئة معادلات خطية بمتغيرين بواسطة جيوجبرا:

نطلب من التلاميذ أن يرسموا بواسطة جيوجبرا معادلتين خطيتين بمجهولين من الصورة $ax + by = c$: $a_1x + b_1y = c_1$ و $a_2x + b_2y = c_2$، بحيث يكون لكل من البارامترات a_1، b_1 ، c_1 ، a_2، b_2 و c_2 شريط تمرير يمكننا من تغيير قيمها. هكذا يمكن للتلاميذ أن يدرسوا كافة الحالات الممكنة، بما فيها الحالات الخاصة والمثيرة للاهتمام كالحالة التي يتحقق فيها ما لا نهاية من الحلول أو عدم وجود حل للمعادلة.

الجدول 13 يري كيفية القيام ببناء هيئة معادلات عامة المكونة من معادلتين خطيتين بمجهولين.

جدول 13: حل معادلتين بمجهولين بواسطة جيوجبرا

الخطوة	الخيار	العملية
إنشاء أشرطة تمرير لبارمترات الدوال:		
1		نختار القائمة "أزرار".
2		نختار الأمر "زر المتغيرات".

الخطوة	الخيار	العملية
3		ننقر على المكان المناسب في لوح الرسم لإنشاء هذا الشريط، ثم نحدد نوعه كعددي ثم قيمته القصوى وقيمته الدنيا ثم ننقر على تطبيق.
4		نقوم ببند 3 ست مرات.
إنشاء المعادلات الخطية بمجهولين بحيث تكون متعلقة بأشرطة التمرير:		
5		نكتب في مربع الإدخال المعادلة الخطية الأولى كما يظهر في الرسم، ثم ننقر على زر الإدخال - Enter.
		نكتب في مربع الإدخال معادلة الدالة الخطية الثانية كما يظهر في الرسم، ثم ننقر على زر الإدخال - Enter.
		نتحكم بقيم البارامترات عن طريق أشرطة التمرير.

بحث واستكشاف:

يمكننا بعد أن بنينا الأبلت طرح أسئلة بحثية على التلاميذ، مثلا:

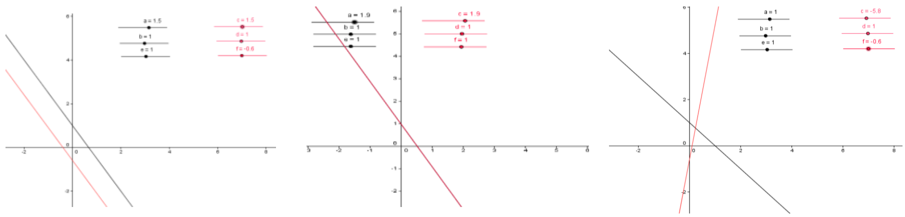
- هل يمكننا تتغير قيم البارمترات في المعادلة الثانية بحيث يكون لهيئة المعادلات الناتجة:

(أ) حل واحد

(ب) ما لا نهاية من الحلول

(ت) لا يوجد حل

جيوجبرا تساعدنا في الإجابة على السؤال إذ أنها تمكنا من التعرف على عدد الحلول بيانيا. الشكل 11 يري الإمكانيات البيانية المختلفة التي يمكن الحصول لهيئة معادلات خطية بمجهولين.



شكل 11: الإمكانيات البيانية المختلفة لهيئة معادلات خطية بمجهولين

- ما هي الشروط التي يجب أن تتحقق بالنسبة للعلاقة بين بارامترات المعادلة الأولى وبارامترات المعادلة الثانية بحيث يكون للمعادلتين:

(أ) حل واحد

(ب) لا يوجد حل

(ت) ما لا نهاية من الحلول

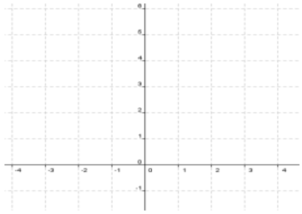
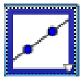
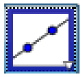
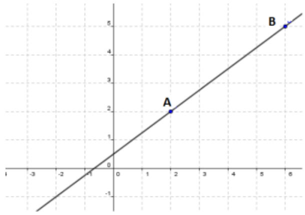
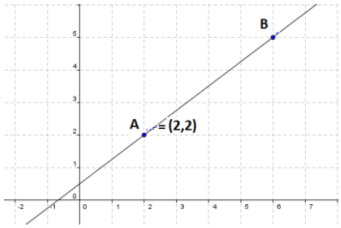
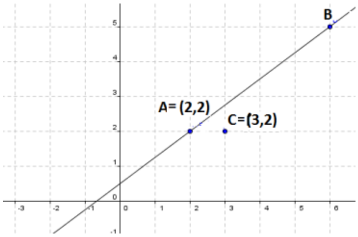
لبحث هذه الشروط، يمكن إضافة نص مناسب وقيم حاصل القسمة بين البارامترات المناسبة كما فعلنا في حالة المستقيمات المتوسطة.

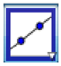
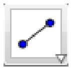
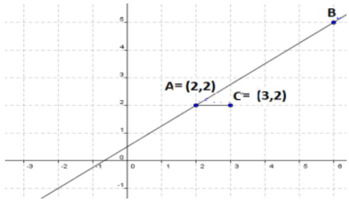
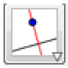
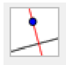
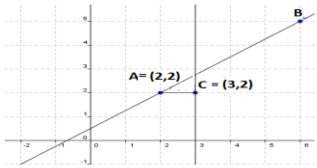
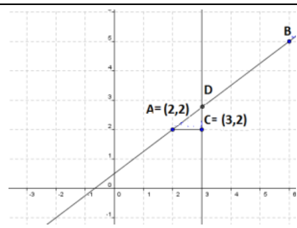
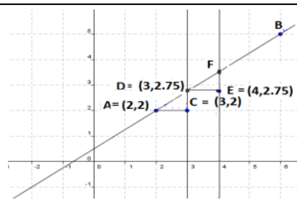
- نطلب من الطلاب رسم ثلاث معادلات خطية بمجهولين باستخدام جيوجبرا، ثم فحص إمكانيات الحلول المختلفة لهذه الهيئة.

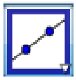
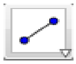
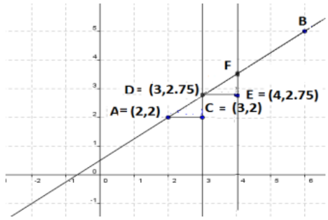
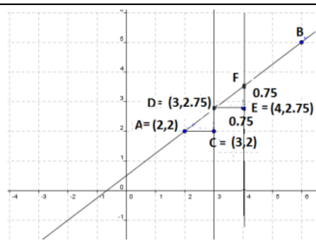
وتيرة تغير الدالة الخطية:

نطلب من الطلاب رسم دوال خطية مختلفة في جيوجبرا وفحص التغير في y لكل تغير وحدة واحدة في x. الجدول 14 يري الخطوات التي من الممكن أن يقوم بها الطلاب لفعل ذلك.

جدول 14: إيجاد وتيرة التغير لدالة خطية

الخطوة	الخيار	العملية
رسم دالة خطية:		
1		نضغط الفأرة على اليمين ونختار الأمر "شبكة" لتظهر الشبكة في هيئة المحاور.
2		نختار القائمة "مستقيمات".
3		نختار الأمر "مستقيم مار من نقطتين".
4		ننقر على نقطتين في هيئة المحاور لينتج مستقيم.
رسم الزيادة في y عندما تزيد x وحدة واحدة: زيادة أولى		
5		نختار نقطة على المستقيم، لنفرض أننا اخترنا النقطة A، ونظهر إحداثياتها. لنظهر الإحداثيات نختار النقطة ونضغط بالفأرة على اليمين ونختار "صفات الكائن"، ثم الأمر "أظهر التسمية"، ثم الأمر "الاسم والقيمة".
6		نعين نقطة على هيئة المحاور لها نفس الإحداثية y مثل A واحداثية x لها تزيد بوحدة عن احداثية x لـ A. في حالة الرسم أعلاه ندخل في حقل البيانات النقطة (3,2).

الخطوة	الخيار	العملية
7		نختار القائمة "مستقيمات".
8		نختار الأمر "قطعة مستقيمة".
9		ننشئ قطعة بين A و C.
10		نختار القائمة "مستقيمات ذات صفة خاصة".
11		نختار الأمر "مستقيم عمودي مار في نقطة".
12		نختار القطعة AC، ثم نحرك العمود حتى النقطة C.
13		نختار القائمة "نقاط".
14		نختار الأمر "نقطة تقاطع كائنين".
15		نختار المستقيم AB، ثم نختار العمود، فنحصل على نقطة تقاطعهما.
رسم الزيادة في y عندما تزيد x وحدة واحدة: زيادة ثانية		
16		نكرر الخطوات من 5 حتى 15 ولكن هذه المرة بالنسبة للنقطة D.

الخطوة	الخيار	العملية
إيجاد مقدار الزيادة في y كل مرة زدنا فيها x وحدة واحدة		
17		نختار القائمة "مستقيمات".
18		نختار الأمر "قطعة مستقيمة".
19		نحدد (ننشئ) كلا من القطع CD و EF.
20		نبين طول كل من CD و EF. يظهر لنا أن طول كل منهما هو 0.75.

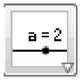
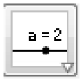
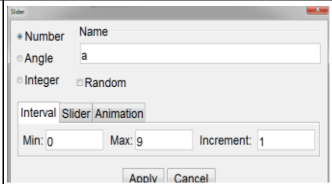
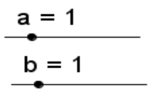
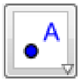
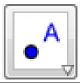
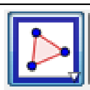
نقاش واستكشاف:

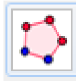
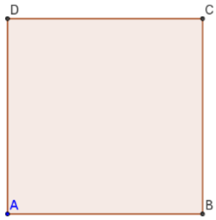
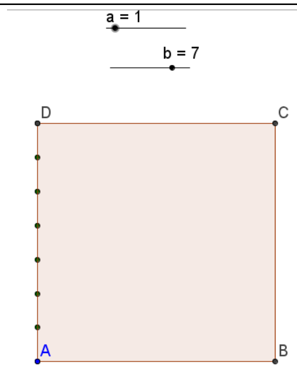
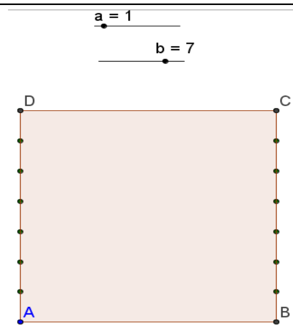
نناقش مع الطلاب الزيادة في y كلما زادت x وحدة واحدة. نسألهم: ماذا لو زدنا x مرّة أخرى وحدة واحدة؟ كم تزداد قيمة y؟ ونتوصل معهم أن هذه الزيادة ثابتة، ونقارن مقدارها مع قيمة البارامتر a للدالة الخطية. قيمة بارامترات الدالة الخطية يمكن أن يتوصل إليها الطلاب من قانون المستقيم في الحقل الجبري في جيوجبرا.

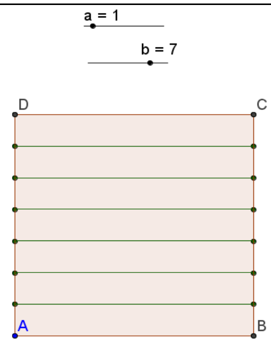
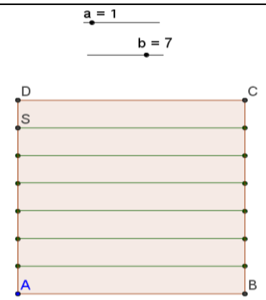
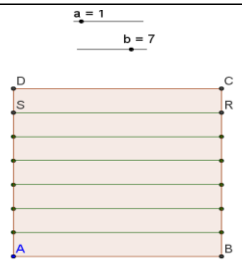
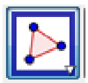
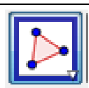
تمثيل الكسر بواسطة جيوجبرا:

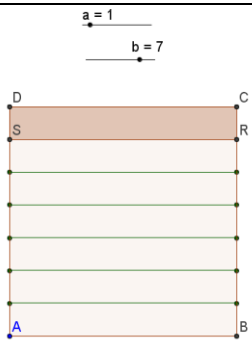
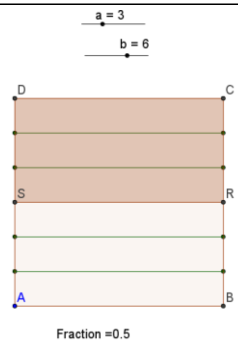
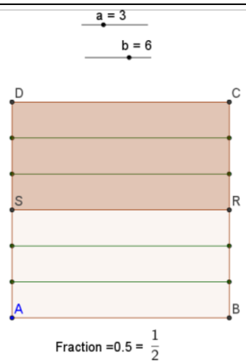
موضوع الكسور من أهم المواضيع في المدرسة الابتدائية، بل هو يرافق الطالب في كل مراحل تعمله، ومن هنا أهمية تقديمه بتمثيلات مختلفة للطالب. برنامج جيوجبرا يمكن من تقديم عدة تمثيلات للكسور: تمثيل ديناميكي، تمثيل بصري، حسابي وجبري. الجدول 15 يبين خطوات بناء هذه التمثيلات في جيوجبرا.

جدول 15: بناء تمثيلات مختلفة للكسر بواسطة جيوجبرا

الخطوة	الخيار	العملية
إنشاء شريطي تمرير، بحيث يمثل الأول بسط الكسر(a)، ويمثل الآخر مقامه (b).		
1		نختار القائمة "أزرار".
2		نختار الأمر "زر المتغيرات".
3		ننقر على المكان المناسب في لوح الرسم لإنشاء شريط تمرير. نحدد نوعه كعددي ونجعل قيمته القصوى 9 وقيمته الدنيا 0 ومقدار القفزة 1، ثم ننقر على تطبيق.
4		نكرر الخطوة السابقة مرة أخرى لإنشاء شريط التمرير b.
تمثيل الكسر هندسيا		
انشاء مربع لتمثيل الكسر:		
5		نختار القائمة "نقاط".
6		نختار الأمر "نقطة جديدة".
7		ننقر على مكان ما في لوح الرسم لرسم النقطة A (أحد رؤوس المربع).
8		نكتب أمر إنشاء نقطة جديدة في مربع الإدخال، B=A+(9,0). لاحظوا أن النقطة B لها إحداثية x أكبر بـ 9 من الإحداثية x للنقطة A، بينما الإحداثية y لها تساوي الإحداثية y للنقطة A.
9		نختار القائمة "مضلعات".

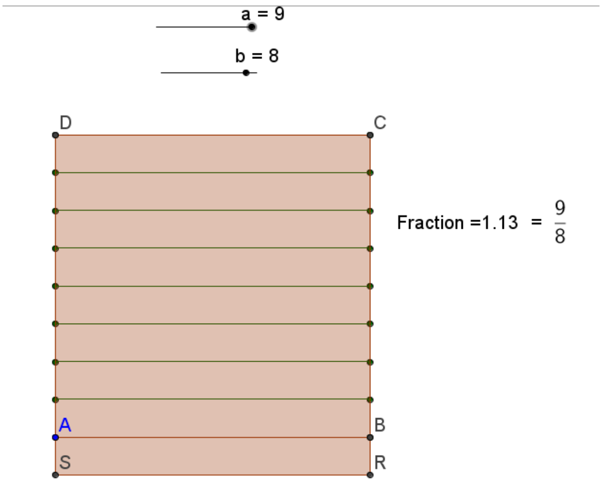
الخطوة	الخيار	العملية
10		نختار الأمر "مضلع منتظم".
11		ننقر على النقطة A ثم على النقطة B، ونكتب 4 كعدد أضلاع المضلع. ينتج مربع طول ضلعه 9 وحدات. هكذا نكون قد عرّفنا أيضا النقطة D والنقطة C وذلك بدلالة A.
تمثيل الكسر بواسطة المربع:		
12		نكتب الأمر L1=Sequence[A+i*(D-A),i,0,1,1/b] في شريط الإدخال. عندما b=7. ما يقوم به الأمر هو رسم النقاط التالية: {A+0*(0,9), A+(1/7)*(0,9), A+(2/7)*(0,9), ..., A+(7/7)*(0,9)} = {A, A+(0,9/7), A+(0,18/7), ..., A+(0,9)} في الرسم على اليمين هذه النقاط موجودة على الضلع AD، بما في ذلك A و D.
13		نكتب الأمر L2=Sequence[B+i*(C-B),i,0,1,1/b] في شريط الادخال. هذا الأمر يرسم النقاط على الضلع BC بما في ذلك B و C.

الخطوة	الخيار	العملية
14		نكتب الأمر L3=Sequence[Segment[Element[L1,k],Element[L2,k]],k,2,b] في شريط الإدخال. هذا الأمر يرسم سلسلة من القطع بين نقاط، بحيث يأخذ طرفها الأول من سلسلة النقاط الأولى (L1)، والتي هي على المستقيم AD، وطرفها الثاني من سلسلة النقاط الثانية (L2)، والتي هي على المستقيم BC.
15		نكتب الأمر S=D-(0,a/b*9) في شريط الإدخال. هذا الأمر ينشئ نقطة S هي أحد رؤوس مضلع سننشئه فوق المربع الحالي. هذا المضلع يعبر عن بسط الكسر المطلوب.
16		نكتب الأمر R=C-(0,a/b*9). هذا الأمر ينشئ نقطة R هي رأس ثاني للمضلع الملائم لبسط الكسر.
17		نختار القائمة "مضلعات".
18		نختار الأمر "مضلع".

الخطوة	الخيار	العملية
19		ننقر على النقاط D,C,R,S,D بالتوالي. وهكذا نكون قد انتهينا من التمثل الهندسي للكسر $\frac{a}{b}$. لاحظوا أن البسط ممثل بالمضلع DCRS، بينما المقام ممثل بالمضلع ABCD.
تمثيل الكسر جبريا		
تمثيل ككسر عشري وككسر عددي:		
20		للحصول على تمثيل عشري للكسر نكتب في مربع الإدخال: “Fraction=”+a/b لا نريد أن ننسى أن القوسين "" يدلان على أمر نصّي فقط.
21		للحصول على تمثيل عادي للكسر نكتب في مربع الإدخال الأمر: FractionText[a/b]

ملاحظة: يجب لفت نظر الطلاب إلى الحالة التي يكون فيها البسط a أكبر من المقام b. ففي هذه الحالة يكون التمثيل الهندسي منسوبا إلى المضلع ABCD، بحيث يشكل هذا المضلع

واحدا صحيحا. فمثلا الحالة التي يكون فيها a=9 و b=8 ينتج لدينا الكسر الذي في شكل 12.



شكل 12: عندما يكون الكسر أكبر من 1

يجب الانتباه إلى أن المضلع ABCD الذي يشكل واحدا صحيحا يكون مربعا حسب البناء الذي بنيناه في الخطوة 11 في الجدول 15.

استنتاجات:

برنامج جيوجبرا اليوم هو برنامج في أوج تطوره التكنولوجي والرياضي، وما زالت إمكانيات تطوره قائمة وكبيرة بوصفه برنامجا مفتوحا يطوره المستخدمون حسب احتياجاتهم. يعرض المقال مصادر وتاريخ برنامج الجيوجيرا، ذاكرا ميزاته وفوائده وأمثلة من الرياضيات على استخدامه في مختلف مراحل التعلم. هناك حاجة في مدارسنا العربية لاستخدام هذا البرنامج لتعليم وتعلم الرياضيات وذلك ليتمكن الطلاب من اكتشاف العلاقات الرياضية وحدهم، وكذلك ليتمكنوا من القيام ببناءات صعب أن يقوموا بها على الورق.

وما يؤكد إمكانيات برنامج جيوجبرا التعليمية هو دعمه لتخصيص عملية التعليم والتعلم: بناء أمثلة توضيحية، التعمق في الموضوعات المثيرة للاهتمام، ملاءمة المشكلات الرياضية والأدوات للطالب. كما أنها تمكن الطالب من التركيز على الأفكار بدلا من محاولة الحصول على حساب صحيح لحلول بعض هيئات المعادلات الخطية.

المقال يعرض فعاليات من الممكن أن يستفيد منها معلمو المدارس وهي أساس لفعاليات سوف نعمل على رفعها على موقع خاص بالإنترنت، وبذلك يمكن لعدد أكبر من المعلمين أن يصلوا إليها ويستفيدوا منها. وكخطوة تالية يمكن للمعلمين أنفسهم أن يطوروا فعاليات شبيهة يرفعونها إلى مواقع مدارسهم وتكون مصادر مساعدة لهم في تعليمهم.

ببليوغرافيا

- Adams, C. & Muilenburg, L. (2012). Incorporating GeoGebra into Secondary Mathematics Instruction to Improve Student Understanding. In P. Resta (Ed.), *Proceedings of Society for Information Technology & Teacher Education International Conference 2012* (pp. 3507-3510). Chesapeake, VA: AACE.
- Barnard, B. & Stols, G. (2009). Investigating Geometry using GeoGebra. Open access internet publication.
- Bayazit, I. & Aksoy, Y. (2010). Connecting Representations and Mathematical Ideas with GeoGebra. *GeoGebra: The New Language for The Third Millenium*, 1 (1), 93-106.
- Carter, J. A. & Ferrucci, B. J. (2009). An Analysis of Students' Research on Model Lessons That Integrate GeoGebra into School Mathematics. *The 14th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM 2009*), Beijing, China.
- Dikovich, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, 6 (2), 191–203.
- Fahlberg-Stojanovska, L. & Trifunov, Z. (2010). Constructing and Exploring Triangles with GeoGebra. *Anale Seria Informatica*, 8, 45-54.
- http://anale-informatica.tibiscus.ro/downlod/lucrari/8-2-03-Fahlberg.pdf
- Frenzen, C. (2011). Moving results in plane geometry and complex analysis via GeoGebra. *Electronic Proceedings of the Twenty-third Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics* (*ICTCM-23*), 104-110. http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL23/C007/paper.pdf
- Garber, K. & Picking, D. (2010). Technology Tips: Exploring Algebra and Geometry Concepts with GeoGebra. *Mathematics Teacher*, 104 (3), 226-228. http://www.kwoods.org/downloads/news/Garber-Picking%20Article.pdf
- Gittinger, J. D. (2012). A Laboratory Guide for Elementary Geometry using GeoGebra: Exploring the Common Core-Geometry Concepts and Skills. *North American GeoGebra Journal*, 1 (1), 11-26.

- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics* (pp.1-23). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Guncaga, J. & Majherova, J. (2012). GeoGebra as a motivational tool for teaching and learning in Slovakia. *North American GeoGebra Journal*, 1, 1, 45-48.
- Hohenwarter, M. and Fuchs, K. (2004) Combination of Dynamic Geometry, Algebra and Calculus in the Software System GeoGebra. *Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference*, P´ecs, Hungary.
- Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 126–131, University of Northampton, UK: BSRLM.
- Karadag, Z., & McDougall, D. (2009a). *Visual explorative approaches to learning mathematics*. Atlanta, US: PME-NA.
- Karadag, Z. & McDougall, D. (2009b). Frame Analysis Method: Monitoring Metacognitive Activities. In T. Bastiaens et al. (Eds.), *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education* (pp.934-939). Chesapeake, VA: AACE.
- Lindner, A. (2009). Using Images in GeoGebra for Teaching Mathematics. *GeoGebra Conference 2009*, Linz, Austria.
- Martinovic, D., Karadag, Z. & Freiman, V. (2010). First Decade of GeoGebra: Looking back through Socio-Cognitive Lenses. In Valerian Antohe (Ed.), *GeoGebra: The New Language for the Third Millennium*, 1(1), (pp. 29-44).
- Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 203-233.
- Ogwel, A. (2009). Using GeoGebra in Secondary School Mathematics Teaching: Towards Enhancing Higher Order Thinking Skills. *ICT in the Classroom Conference*. *Durban Girls' College*, September 24-26, 2009.
- Reisa, Z. A. (2010). Computer supported mathematics with Geogebra, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 9, 1449-1455.

- Saha, R. A.; Ayub, A. F. M. & Tarmizi, R. A. (2010). The Effects of GeoGebra on Mathematics Achievement: Enlightening Coordinate Geometry Learning, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 8, 686-693.
- Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: The perspective of constructs. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 2, pp. 1169-1207). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Zengin, Y.; Furkan, H. & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187.

مواقع:

Math Open Reference: www.mathopenref.com/constparallel.html