متباينات مشهورة في الرياضيات

علي عثمان
أكاديمية القاسمي

تلخيص:

في هذا المقال أتناول بعض المتباينات الشهيرة في الرياضيات مع استعراض لبراهينها وأمثلة لاستعمالاتها. أعرض تعميماً لمتباينة هولدر مع البرهان وعرض شرط حدوث المساواة. في المقال العديد من الاستنتاجات لمتباينات كثيرة في الرياضيات الناتجة عن تعميم متباينة هولدر.

نبدأ بعرض متباينة كوشي-شفارتز:

نعتمد على المتباينة البسيطة الآتية:

1. **نظرية (متباينة تمهيدية (أ)):** لكل b a حقيقيين يتحقق أنّ: $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$

برهان: $(a-b)^2 \ge 0$ تكافئ $a^2 + b^2 \ge 2ab$ وهي تكافئ $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ وأن التساوي يحدث إذا وفقط إذا كان $a = b$.

2. **نظرية (متباينة كوشي- شفارتز):** لكل $a_1, a_2, ..., a_n$ وَ $b_1, b_2, ..., b_n$ أعداد حقيقية يتحقق أن : $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

ويحدث التساوي إذا وفقط إذا وُجِد $M > 0$ بحيث أنَّ $a_i = Mb_i$ لكل $1 \le i \le n$ أو $a_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$ أو $b_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$.

برهان: إذا كان $a_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$ أو $b_i = 0$ لكل $1 \le i \le n$

فمن الواضح أن $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$ وَ $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} = 0$.

نفرض الآن أن $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$ وأن $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 > 0$. أي أن ليست جميع الحدود $a_1, a_2, ..., a_n$ أصفارا وليست جميع الحدود $b_1, b_2, ..., b_n$ أصفارا.

من أجل التبسيط في الكتابة، نرمز: $A = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ وَ $B = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

نرمز $x_i = \frac{a_i}{A}$ وَ $y_i = \frac{b_i}{B}$ لكل $1 \le i \le n$ حسب المتباينة(أ) التي افتتحنا بها فإن:

$$x_i y_i \le \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{2} y_i^2$$

لذلك:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} y_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{A^2} \cdot A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B^2} \cdot B^2 = 1$$

أي أن $$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} \cdot \frac{bi}{B} \le 1$$

أي أن $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le A \cdot B \Leftrightarrow \frac{1}{AB} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le 1$$

وهو يكافئ $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

يحدث التساوي $\Leftrightarrow$ $\frac{a_i}{A} = \frac{b_i}{B}$ لكل $1 \le i \le n$

أي أن $a_i = \frac{A}{B} \cdot b_i$ لكل $1 \le i \le n$. نرمز $M = \frac{A}{B}$

أي أن $a_i = Mb_i$ لكل $1 \le i \le n$, حيث أن $M > 0$ ثابت.

عندما نستبدل a_i بـ $|a_i|$ وَ b_i بـ $|b_i|$

فنحصل على: $$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |b_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

لكن $$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |b_i| = \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \ge \left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right|$$

لذلك نتوصل إلى أن $$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

متى يحدث التساوي $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ ؟

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ يوجد $M>0$ بحيث أن $a_i = Mb_i$ لكل $1 \le i \le n$

$\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$ يوجد $t<0$ بحيث أن $a_i = tb_i$ لكل $1 \le i \le n$.

__أمثلة:__

مثال 1. جد القيمة الكبرى والقيمة الصغرى للمقدار $x+y$ عندما $x^2+y^2=36$.

__حل:__ $|x+y| = |1\cdot x + 1\cdot y| \le \sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$ حسب كوشي-شفارتز

لذلك $|x+y| \le \sqrt{2}\cdot\sqrt{36} = 6\sqrt{2}$

يحدث التساوي عند ما يوجد ثابت t بحيث أن $y = t$ .1 $x = t\cdot 1$

أي: $x+y=6\sqrt{2} \Leftrightarrow t\cdot 1 + t\cdot 1 = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 3\sqrt{2}$

أي عندما $x=3\sqrt{2}$ وَ $y=3\sqrt{2}$, القيمة العظمى $6\sqrt{2}$.

متى يكون $x+y=-6\sqrt{2}$ ؟

بنفس الطريقة نتوصل إلى أن $x=y=-3\sqrt{2}$, القيمة الصغرى للدالة $-6\sqrt{2}$.

مثال 2. جد القيمة العظمى للمقدار $x+3y$ عندما $x^2+y^2=100$.

__حل:__ $|x+3y| \le \sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{10}\cdot\sqrt{100} = 10\sqrt{10}$

يحدث التساوي عندما يوجد t بحيث أن $\begin{cases} x=t \\ y=3t \end{cases}$

$|t+9t| = 10\sqrt{10} \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{10}$

عندما $t=\sqrt{10}$ فإن $x=\sqrt{10}$ وَ $y=3\sqrt{10}$ وفي هذه الحالة قيمة المقدار $x+3y$ تساوي $10\sqrt{10}$ وهي القيمة العظمى.

عندما $t=-\sqrt{10}$ فإن $x=-\sqrt{10}$ وَ $y=-3\sqrt{10}$. وفي هذه الحالة قيمة المقدار $x+3y$ تساوي $-10\sqrt{10}$ وهي القيمة الصغرى.

مثال 3. أكد أن القيمة العظمى للمقدار $ax+by$ عندما $x^2+y^2=R^2$ هي $R\sqrt{a^2+b^2}$ (والقيمة الصغرى هي $-R\sqrt{a^2+b^2}$).

مثال 4. جد القيمة العظمى للمقدار $3x+5y$ عندما $4x^2+9y^2=100$.

حل: $4x^2+9y^2=100 \Leftrightarrow (2x)^2+(3y)^2=100$. نعوض $t=2x$, $s=3y$.

أي أن $x=\frac{1}{2}t$ وَ $y=\frac{1}{3}s$.

أي أن المسألة هي: إيجاد القيمة العظمى للمقدار $\frac{3}{2}t+\frac{5}{3}s$ تحت الشرط $t^2+s^2=100$.

من المسألة السابقة, واضح أن القيمة العظمى تساوي $\sqrt{100}\cdot\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}$

مثال 5. جد القيمة الصغرى للمقدار x^2+y^2 إذا علمت أن $x+y=10$.

حل:

$$(x+y)^2=100$$
$$x^2+y^2+2xy=100$$

لكن $2xy\le x^2+y^2$ (المساواة عندما $x=y$)

لذلك فإنَّ $x^2+y^2+x^2+y^2\ge x^2+y^2+2xy=100$

لذلك فإنَّ $2x^2+2y^2\ge 100$ لذلك فإنَّ $x^2+y^2\ge 50$

أي أن القيمة الصغرى للمقدار x^2+y^2 هي 50 عندما $x=y$ أي عندما $x=y=5$

مثال 6. جد القيمة الصغرى للمقدار x^2+y^2 إذا علمت أن $x+y=A$.

بنفس الطريقة نتوصل إلى أن القيمة الصغرى للمقدار x^2+y^2 تساوي $\frac{1}{2}A^2$ عندما يكون $x=y=\frac{1}{2}A$. (كيف؟).

مثال 7. جد القيمة الصغرى للمقدار $x^2+y^2+z^2$ إذا علمت أن $x+y+z=A$.

حل:

$$(x+y+z)^2=A^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=A^2$$
$$x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+(y^2+z^2)\geq x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=A^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(x^2+y^2+z^2)\geq A^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2\geq \frac{1}{3}A^2$$

ويحدث التساوي عندما $x=y=z=\frac{1}{3}A$

مثال 8. جد القيمة الصغرى للمقدار $x^2+y^2+z^2+d^2$ عندما يكون $x+y+z+d=A$.

حل: بنفس الطريقة نتوصل إلى أن القيمة الصغرى هي $\frac{1}{4}A^2$

عندما $x=y=z=d=\frac{1}{4}A$

سؤال (تعميم). جد القيمة الصغرى للمقدار $\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ إذا كان $\sum_{i=1}^{n}x_i=A$

<u>3. (متباينة تمهيدية (ب))</u>

لكل r وَ s موجبين وَ $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ يتحقق أن $ab\leq\frac{1}{r}a^r+\frac{1}{s}b^s$ لكل a وَ b موجبين،

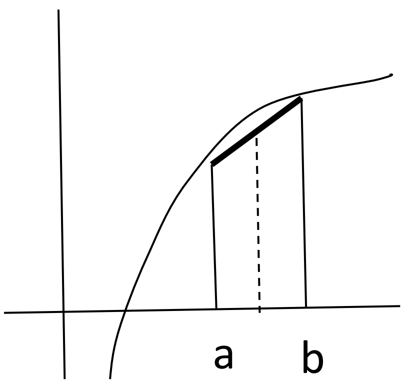
ويحدث التساوي إذا وفقط إذا $a^r=b^s$.

(هذه المتباينة هي تعميم المتباينة التمهيدية (أ)).

برهان: نستعين بصفة التحدب إلى أسفل للدالة

$f(x)=\ln x$.

$$\ln(\frac{1}{r}x+\frac{1}{s}y)\geq\frac{1}{r}\ln x+\frac{1}{s}\ln y\ ,$$



لكل x وَ y موجبين ويحدث التساوي

إذا وفقط إذا $x = y$.

المتباينة الأخيرة تكافئ:

$$\ln(\frac{1}{r}x+\frac{1}{s}y) \ge \ln x^{\frac{1}{r}} + \ln y^{\frac{1}{s}} = \ln x^{\frac{1}{r}} \cdot y^{\frac{1}{s}}.$$

وبما أن $\ln$ دالة تصاعدية فإن $\frac{1}{r}x+\frac{1}{s}y \ge x^{\frac{1}{r}} \cdot y^{\frac{1}{s}}$.

نستبدل $a^r = x$, $b^s = y$.

لذلك فإن $\frac{1}{r}\cdot a^r + \frac{1}{s}\cdot b^s \ge a\cdot b$ وأن التساوي إذا وفقط إذا $a^r = b^s$.

المتباينة التي سنبرهنها الآن هي متباينة هولدر *Hölder* وهي تعميم لمتباينة كوشي-شفارتز.

4. متباينة هولدر (*Hölder* inequality)

لتكن $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n$ أعداداً حقيقية. وليكن r وَ s عددين موجبين بحيث أن $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ فإنّ:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^r)^{\frac{1}{r}} \cdot (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^s)^{\frac{1}{s}}$$

ويحدث التساوي إذا وفقط إذا وجد $k > 0$ بحيث أن $|b_i| = k|a_i|^{r-1}$ لكل $1 \le i \le n$.

برهان: نرمز $A = (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^r)^{\frac{1}{r}}$ ، $B = (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^s)^{\frac{1}{s}}$ ، $\frac{a_i}{A} = x_i$ ، $\frac{b_i}{B} = y_i$.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \sum_{i=1}^{n} (\frac{1}{r}|x_i|^r + \frac{1}{s}|y_i|^s) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n} (|x_i|^r + \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^s)$$

$$= \frac{1}{r}\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|^r}{A^r} + \frac{1}{s}\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{|b_i|^s}{B^s}$$

$$= \frac{1}{r}\cdot \frac{1}{A^r} \sum |a_i|^r + \frac{1}{s}\cdot \frac{1}{B^s} \sum |b_i|^s$$

$$= \frac{1}{r}\cdot \frac{1}{A^r}\cdot A^r + \frac{1}{s}\cdot \frac{1}{B^s}\cdot B^s = \frac{1}{r}+\frac{1}{s} = 1$$

لذلك فإنَّ: $\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i}{A}\frac{b_i}{B}\right|\le 1$ ، وهذا يكافئ : $\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le A\cdot B$

أي أنّ: $\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i| \le (\sum_{i=1}^{n}|a_i|^r)^{\frac{1}{r}}\cdot(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^s)^{\frac{1}{s}}$

متى يحدث التساوي؟

يحدث التساوي عندما يحدث التساوي $\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{r}|x_i|^r+\frac{1}{s}|y_i|^s)$. وهذا يحدث إذا وفقط إذا $|x_i|^r=|y_i|^s$ لكل $1\le i\le n$. وهذا يكافئ $|y_i|=|x_i|^{\frac{r}{s}}=|x_i|^{r-1}$. لكن $\frac{a_i}{A}=x_i$ و $\frac{b_i}{B}=y_i$ لذلك يحدث التساوي إذا وفقط إذا :

$$|b_i|=B|y_i|=B|x_i|^{1-r}=B\left|\frac{a_i}{A}\right|^{r-1}=\frac{B}{A^{r-1}}|a_i|^{r-1}$$ لكل $1\le i\le n$.

أي أن التساوي يحدث إذا وفقط إذا وجد $k>0$ بحيث أنّ: $|b_i|=k|a_i|^{r-1}$ لكل $1\le i\le n$.

ملاحظة: واضح أنّ $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i\right|\le(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^r)^{\frac{1}{r}}\cdot(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^s)^{\frac{1}{s}}$ لأنّ $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|$

5. نظرية: إذا كانت $x_1,x_2,....,x_n$ أعدادا حقيقية موجبة و $t_1,t_2,....,t_n$ أعدادًا حقيقية موجبة ومجموعها 1 فإنّ : $\prod_{i=1}^{n}x_i \le \sum_{i=1}^{n}t_i\cdot x_i^{\frac{1}{t_i}}$ ويحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن $x_1^{\frac{1}{t_1}}=x_2^{\frac{1}{t_2}}=x_3^{\frac{1}{t_3}}=......=x_n^{\frac{1}{t_n}}$. (هذه المتباينة هي تعميم للنظرية التمهيدية (ب)).

<u>برهان:</u> بالاستقراء الرياضي. نفرض صدق القضية لِ n ونبرهنها لِ $n+1$

(عندما $n=1$ واضح. عندما $n=2$ هذه هي المتباينة التمهيدية (ب)).

لتكن $a_1, a_2, \ldots. a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ أعدادا حقيقية موجبة ولتكن $r_1, r_2, \ldots. r_{n-1}, r_n, r_{n+1}$ أعدادًا حقيقية موجبة ومجموعها 1 فإنّ:

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots . \cdot a_{n-1} \cdot (a_n \cdot a_{n+1})$$

حسب فرضية الاستقراء الرياضي (نرى n أعدادا حقيقية) فإنَّ :

$$(\square)\ \prod_{i=1}^{n+1} a_i \le r_1 \cdot a_1^{\frac{1}{r_1}} + r_2 \cdot a_2^{\frac{1}{r_2}} + \ldots . + r_{n-1} \cdot a_{n-1}^{\frac{1}{r_{n-1}}} + (r_n + r_{n+1})(a_n \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}}$$

وأن التساوي يحدث إذا وفقط إذا تحقق:

$$a_1^{\frac{1}{r_1}} = a_2^{\frac{1}{r_2}} = a_3^{\frac{1}{r_3}} = \ldots\ldots\ldots = a_{n-1}^{\frac{1}{r_{n-1}}} = \left(a_n a_{n+1}\right)^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}}$$

حسب متباينة ب:

$$(a_n \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}} = a_n^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}} \cdot a_{n+1}^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}} \le$$

$$\le \frac{r_n}{r_n + r_{n+1}} \cdot \left(a_n^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}}\right)^{\frac{r_n + r_{n+1}}{r_n}} + \frac{r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} \cdot \left(a_{n+1}^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}}\right)^{\frac{r_n + r_{n+1}}{r_{n+1}}}$$

$$= \frac{r_n}{r_n + r_{n+1}} \cdot a_n^{\frac{1}{r_n}} + \frac{r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} \cdot a_{n+1}^{\frac{1}{r_{n+1}}}$$

لذلك فإن الحد الأخير في المجموع $(\square)$ يحقق:

$$(r_n + r_{n+1}) \cdot (a_n \cdot a_{n+1})^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}} \le r_n \cdot a_n^{\frac{1}{r_n}} + r_{n+1} \cdot a_{n+1}^{\frac{1}{r_{n+1}}}$$

لذلك فإن : $\prod_{i=1}^{n+1} a_i \le \sum_{i=1}^{n+1} r_i \cdot a_i^{\frac{1}{r_i}}$.

يحدث التساوي إذا وفقط تحقق أنّ $a_n^{\frac{1}{r_n}} = a_{n+1}^{\frac{1}{r_{n+1}}}$. لكن $a_1^{\frac{1}{r_1}} = \left(a_n a_{n+1}\right)^{\frac{1}{r_n + r_{n+1}}}$

لذلك فبما أن $a_{n+1}^{\frac{1}{r_{n+1}}} = a_n^{\frac{1}{r_n}}$ فينتج أنّ:

$$a_1^{\frac{1}{r_1}} = \left(a_n a_{n+1}\right)^{\frac{1}{r_n+r_{n+1}}} = \left(a_n a_n^{\frac{r_{n+1}}{r_n}}\right)^{\frac{1}{r_n+r_{n+1}}} = \left(a_n^{\frac{r_{n+1}}{r_n}+1}\right)^{\frac{1}{r_n+r_{n+1}}} = a_n^{\frac{1}{r_n}}$$

لذلك فإنّ $a_1^{\frac{1}{r_1}} = a_2^{\frac{1}{r_2}} = a_3^{\frac{1}{r_3}} = ...= a_{n-1}^{\frac{1}{r_{n-1}}} = a_n^{\frac{1}{r_n}} = a_{n+1}^{\frac{1}{r_{n+1}}}$

بهذا ينتهي برهان النظرية بالاستقراء الرياضي.

6. متباينة المُعَدَّلَيْن AM-GM (المعدّل الحسابي- المعدّل الهندسي)

إذا كانت $a_1, a_2, \ ...., a_{n-1}, a_n$ أعداداً حقيقية موجبة فإنّ :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_{n-1} \cdot a_n} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

يحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

برهان: متباينة المُعَدَّلَيْن هي نتيجة مباشرة لنظرية 5 . نستبدل $t_i = \frac{1}{n}$

وأيضاً $x_i = a_i^{\frac{1}{n}}$ لكل $1 \le i \le n$. فنحصل على:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{n}} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \left(a_i^{\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

ملاحظة: عندما نعوّض $b_i = \frac{1}{a_i}$ في المتباينة الأخيرة نحصل على

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}$$

وهي تكافئ $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i} \leq \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}}$.

تعريف: المقدار $\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i}}$ يسمى المعدّل التوافقي ويرمز له HM .

استنتجنا فيما تقدّم أن المعدّل التوافقي أصغر أو يساوي المعدّل الهندسي، أي أن $HM \leq GM$. ويحدث التساوي إذا وفقط إذا تساوت جميع الحدود.

7. نظرية (تعميم لمتباينة هولدر)

لتكن $M = (a_{ij})_{i=1,\ j=1}^{m\ ,\ n}$ مصفوفة من الأعداد الحقيقية الموجبة.

ولتكن $q_1, q_2, ..., q_m$ أعداداً موجبة ومجموعها 1. فإنّ:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{i\,j}\right) \leq \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}^{\frac{1}{q_i}}\right)^{q_i}$$

تحدث المساواة إذا وفقط إذا كانت المصفوفة $M^{\#}$ **مصفوفة مضاعفات سطر حيث** أن $M^{\#}$ هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة M بواسطة رفع كل حد من حدود السطر j للقوة $\frac{1}{q_j}$ لكل $1 \leq j \leq m$.

برهان: نرمز $A_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j}^{\frac{1}{q_i}}\right)^{q_i}$ ، $x_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{A_i}$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \le \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} q_i \cdot x_{ij}^{\frac{1}{q_i}}\right) = \sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{\frac{1}{q_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} q_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{A_i}\right)^{\frac{1}{q_i}} = \sum_{i=1}^{m} q_i \frac{1}{(A_i)^{\frac{1}{q_i}}} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\frac{1}{q_i}} = \sum_{i=1}^{m} q_i = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} A_i x_{ij}\right) = \left(\prod_{i=1}^{m} A_i\right) \cdot \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} x_{ij}\right) \le \prod_{i=1}^{m} A_i$$

أي أن:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \le \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\frac{1}{q_i}}\right)^{q_i}$$

متى يحدث التساوي؟

يحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن

$x_{1j}^{\frac{1}{q_1}} = x_{2j}^{\frac{1}{q_2}} = x_{3j}^{\frac{1}{q_3}} = \dots\dots\dots = x_{mj}^{\frac{1}{q_m}}$ لكل $1 \le j \le m$.

لذلك فلكل $1 \le j \le m$ يوجد t_j موجب بحيث أن:

$$x_{1j}^{\frac{1}{q_1}} = x_{2j}^{\frac{1}{q_2}} = x_{3j}^{\frac{1}{q_3}} = \dots\dots\dots = x_{mj}^{\frac{1}{q_m}} = t_j$$

بما أن $x_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{A_i}$ لذلك فإنّ $a_{ij} = A_i t_j^{q_i}$ لكل $1 \le j \le m$ و $1 \le i \le n$. لذلك يحدث التساوي إذا وفقط إذا كانت المصفوفة M من الصورة:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 t_1^{q_1} & A_1 t_2^{q_1} & A_1 t_3^{q_1} & \dots\dots\dots\dots A_1 t_n^{q_1} \\ A_2 t_1^{q_2} & A_2 t_2^{q_2} & A_2 t_3^{q_2} & \dots\dots\dots\dots A_2 t_n^{q_2} \\ A_3 t_1^{q_3} & A_3 t_2^{q_3} & A_3 t_3^{q_3} & \dots\dots\dots\dots A_3 t_n^{q_3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_m t_1^{q_m} & A_m t_2^{q_m} & A_m t_3^{q_m} & \dots\dots\dots\dots A_m t_n^{q_m} \end{pmatrix}$$

حيث أن $A_1 , A_2, \ldots\ldots , A_m$ و $t_1 , t_2, t_3 ,\ldots\ldots, t_n$ هي ثوابت حقيقية موجبة أياً كانت لكل $1 \le j \le m$ يوجد λ_j موجب بحيث أنّ $A_j = \lambda_j^{q_j}$. وفقاً لهذه الرموز فإن:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 t_1)^{q_1} & (\lambda_1 t_2)^{q_1} & (\lambda_1 t_3)^{q_1} & \ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda_1 t_n)^{q_1} \\ (\lambda_2 t_1)^{q_2} & (\lambda_2 t_2)^{q_2} & (\lambda_2 t_3)^{q_2} & \ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda_2 t_n)^{q_2} \\ (\lambda_3 t_1)^{q_3} & (\lambda_3 t_2)^{q_3} & (\lambda_3 t_3)^{q_3} & \ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda_3 t_n)^{q_3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_m t_1)^{q_m} & (\lambda_m t_2)^{q_m} & (\lambda_m t_3)^{q_m} & \ldots\ldots\ldots\ldots(\lambda_m t_n)^{q_m} \end{pmatrix}$$

لتكن $M^{\#}$ المصفوفة الناتجة من المصفوفة M بواسطة رفع كل حد من حدود السطر j للقوة $\frac{1}{q_j}$ لكل $1 \le j \le m$. أي أنّ:

$$\boldsymbol{M}^{\#} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathrm{t}_1 & \lambda_1 \mathrm{t}_2 & \lambda_1 \mathrm{t}_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\lambda_1 \mathrm{t}_\mathrm{n} \\ \lambda_2 \mathrm{t}_1 & \lambda_2 \mathrm{t}_2 & \lambda_2 \mathrm{t}_3 & \ldots\ldots\ldots\ \lambda_2 \mathrm{t}_\mathrm{n} \\ \lambda_3 \mathrm{t}_1 & \lambda_3 \mathrm{t}_2 & \lambda_3 \mathrm{t}_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda_3 \mathrm{t}_\mathrm{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_m \mathrm{t}_1 & \lambda_m \mathrm{t}_2 & \lambda_m \mathrm{t}_3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ \lambda_m \mathrm{t}_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$

نلاحظ أنّ $M^{\#}$ هي مصفوفة جميع أسطرها هي مضاعفات لسطرها الأوّل. هذا يقودنا إلى تعريف المصطلح الآتي:

تعريف: نقول عن مصفوفة A أنها **<u>مصفوفة مضاعفات سطر</u>** إذا كان كل سطر من أسطرها ناتجاً عن ضرب سطرها الأول بعدد يختلف عن 0.

تعريف: نقول عن مصفوفة A أنها **<u>مصفوفة مضاعفات عمود</u>** إذا كان كل عمود من أعمدتها ناتجاً عن ضرب عمودها الأول بعدد يختلف عن 0 .

ملاحظة: A **مصفوفة مضاعفات سطر** إذا وفقط إذا كانت A **مصفوفة مضاعفات عمود.**

من السهل التأكّد من صدق القضية.

مثال: لتكن $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مصفوفة ذات حدود داخلية موجبة وليكن m و n عددان موجبان بحيث أنّ mn=m+n (أي أنّ مجموع مقلوبيهما يساوي 1، لذلك فإن كل منهما أكبر من 1). حسب متباينة هولدر فإنّ: $ac+bd \le \left(a^n+b^n\right)^{\frac{1}{n}}\left(c^m+d^m\right)^{\frac{1}{m}}$. لكي نعرف في أي حالة تحدث المساواة، نعرّف المصفوفة $M^{\#}=\begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^m & d^m \end{pmatrix}$. حسب النظرية نعلم بأنّ المساواة تحدث إذا وفقط إذا كانت M# مصفوفة مضاعفات سطر. هذا يكافئ $\frac{a^n}{c^m}=\frac{b^n}{d^m} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{c}{d}\right)^m$. بما أنّ $m=\frac{n}{n-1}$ فإنّ المعادلة الأخيرة تكافئ

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^n \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{n-1}} \Leftrightarrow n=\frac{\ln\left(\frac{ac}{bd}\right)}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \text{ و } m=\frac{\ln\left(\frac{ac}{bd}\right)}{\ln\left(\frac{c}{d}\right)}.$$

نلاحظ أنّ > 1 $m>1$ إذا وفقط إذا ($c<d$ أو $a<b$) و ($c>d$ $a>b$)

تطبيق 1: جد القيمة الصغرى المطلقة للدالة

$$f\left(x\right)=\left(3^{x^4+1}+5^{x^4+1}\right)^{\frac{1}{x^4+1}}\left(7^{\frac{x^4+1}{x^4}}+11^{\frac{x^4+1}{x^4}}\right)^{\frac{x^4}{x^4+1}}.$$

حل: عندما نعوّض $m=\frac{x^4+1}{x^4}$, $n=x^4+1$ نتوصل الى التعبير

$$f\left(x\right)=\left(3^n+5^n\right)^{\frac{1}{n}}\left(7^m+11^m\right)^{\frac{1}{m}}$$

واضح أنّ $f(x) \geq 3\cdot 7+5\cdot 11=76$ وتحصل الدالة على القيمة 76 إذا وفقط إذا $n=\frac{\ln 21-\ln 55}{\ln 3-\ln 5}$ إذا وفقط إذا

$$x^4=\frac{\ln 21-\ln 55}{\ln 3-\ln 5}-1=\frac{\ln 7-\ln 11}{\ln 3-\ln 5} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{\frac{\ln 7-\ln 11}{\ln 3-\ln 5}} \approx \pm 0.97 .$$

واضح أن القيمة الصغرى للدالة هي 76 وتحصل الدالة عليها عندما $x \approx \pm 0.97$.

تطبيق 2: حل المعادلة $83=\left(5^{x^2+1}+6^{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}\left(7^{\frac{x^2+1}{x^2}}+8^{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)^{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

حل: حسب النتيجة في المثال فإن

$$83=5\cdot 7+6\cdot 8\leq\left(5^{x^2+1}+6^{x^2+1}\right)^{\frac{1}{x^2+1}}\left(7^{\frac{x^2+1}{x^2}}+8^{\frac{x^2+1}{x^2}}\right)^{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

ويحدث التساوي إذا وفقط إذا تحقق أن

$$x^2+1=\frac{\ln 35-\ln 48}{\ln 5-\ln 6} \Leftrightarrow x^2=\frac{\ln 35-\ln 48}{\ln 5-\ln 6}-1=\frac{\ln 7-\ln 8}{\ln 5-\ln 6} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{\ln 7-\ln 8}{\ln 5-\ln 6}} \approx \pm 0.856$$

8. نظرية: إذا كانت $M=(a_{ij})_{i=1,\ j=1}^{n,\ n}$ مصفوفة مربعة كل حدودها أعداد حقيقية موجبة، وحاصل ضرب كل حدودها يساوي K، فإن:

$$K=\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n}a_{ij}\right)\leq\frac{1}{n^n}\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}{}^{n} \quad \left(\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}{}^{n}\geq Kn^n \Leftrightarrow\right)$$

برهان: حسب نظرية 7 وباستبدال $\frac{1}{n}=q_i$ لكل $1\leq i\leq n$. ينتج أن:

$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \le \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{n}\right)^{\frac{1}{n}}$. وحسب متباينة المعدّلين فإنّ :

$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$. لذلك فمن الواضح أن:

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right)} \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \le \frac{1}{n}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

وهذا يكافئ: $\prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ij}\right) \le \frac{1}{n^n}\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{n}$.

ومن السهل تأكيد أن التساوي يحدث إذا وفقط إذا كانت جميع حدود المصفوفة متساوية.

نتيجة 1: إذا كانت $M = (a_{ij})_{i=1,\ j=1}^{n\ ,\ n}$ مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية الموجبة، بحيث أن حاصل ضرب جيع حدودها يساوي 1، فإنّ:

$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{n} \ge n^n$ ، ويحدث التساوي إذا وفقط إذا كانت جميع حدود المصفوفة تساوي 1.

نتيجة 2: إذا كانت $M = (a_{ij})_{i=1,\ j=1}^{n\ ,\ n}$ مصفوفة مربعة من الأعداد الحقيقية الموجبة، بحيث أن حاصل ضرب جميع حدودها يساوي 1، فإنّ:

$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ge n^n$ ، وأيضًا $\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \ge n^n$ ويحدث التساوي في إحدى المتباينتين إذا وفقط إذا حدث التساوي في المتباينة الأخرى إذا وفقط إذا كانت جميع حدود المصفوفة تساوي 1.

برهان النتيجة 2: نُعَرِّف المصفوفة $M^* = (a_{ij}{}^{\frac{1}{n}})_{i=1,\ j=1}^{n\ ,\ n}$. من الواضح أنّ حدودها موجبة وحاصل ضرب حدودها يساوي 1. لذلك فهي تحقق النتيجة 1 . لذلك

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^{\frac{1}{n}}\right)^{n} \geq n^{n}$$. أي ان: $$\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geq n^{n}$$. بما أن

المصفوفة البديلة M^t فيتحقق كذلك أن: $\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \geq n^{n}$.

من السهل استنتاج النتيجة الآتية:

نتيجة 3: إذا كانت $M=(a_{ij})_{i=1,\ j=1}^{n,\ \ n}$ مصفوفة مربعة كل حدودها أعداد حقيقية موجبة، وحاصل ضرب كل حدودها يساوي K، فإن:

$$\prod_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \geq \sqrt[n]{K}\, n^{n} .$$

أمثلة وتطبيقات:

1. ليكن n>1 عدداً طبيعياً. نُعرِّف المصفوفة

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots\dots & n \\ n & 1 & 2 & 3 \dots\dots\dots & & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \dots\dots\dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & n & 1 & \dots\dots\dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots\dots\dots & 1 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن مجموع كل سطر من أسطرها يساوي $\frac{n(n+1)}{2}$. ونلاحظ أن حاصل ضرب حدودها يساوي $(n!)^{n}$. حسب النتيجة 3 نستنتج أن:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{n}=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) > \sqrt[n]{(n!)^{n}}\, n^{n}=(n!)\, n^{n}$$

وهو يكافئ:

$$(n+1)^n > 2^n (n!) \Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^n > (n!) \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n > (n!)n^n$$

انتبه أنه لا يمكن حدوث مساواة لأن حدود المصفوفة ليست جميعها متساوية.

نتيجة 4: لكل $n>1$ طبيعي يتحقق أن: $(n+1)^n > 2^n (n!)$.

1. ليكن $n>1$ عدداً طبيعياً. نُعرّف المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \cdots\cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdots\cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{2} \cdots\cdots & \frac{1}{n-2} \\ \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & 1 \cdots\cdots & \frac{1}{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \frac{1}{n-3} \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

من الواضح أن حاصل ضرب حدود المصفوفة يساوي $\left(\frac{1}{n!}\right)^n$. نرمز:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

حسب النتيجة 3 نستنتج أن:

$$\prod_{j=1}^{n} S_n = (S_n)^n > \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n!}\right)^n} n^n = \frac{n^n}{n!}.$$

أي أن لكل n>1 طبيعي يتحقق أن $S_n > \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. بهذا نكون قد أثبتنا النتيجة الآتية:

نتيجة 5: لكل n>1 طبيعي يتحقق أن $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} > \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

2. ليكن n>1 عدداً طبيعياً وليكن r عدداً حقيقياً موجباً. نُعرِّف المصفوفة

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{1}{(n+1)^r} & \frac{1}{2^r} & \frac{1}{3^r} & \frac{1}{4^r}\cdots\cdots\cdots & \frac{1}{n^r} \\
\frac{1}{n^r} & \frac{1}{(n+1)^r} & \frac{1}{2^r} & \frac{1}{3^r}\cdots\cdots\cdots & \frac{1}{(n-1)^r} \\
\frac{1}{(n-1)^r} & \frac{1}{n^r} & \frac{1}{(n+1)^r} & \frac{1}{2^r}\cdots\cdots\cdots & \frac{1}{(n-2)^r} \\
\frac{1}{(n-2)^r} & \frac{1}{(n-1)^r} & \frac{1}{n^r} & \frac{1}{(n+1)^r}\cdots\cdots\cdots & \frac{1}{(n-3)^r} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{2^r} & \frac{1}{3^r} & \frac{1}{4^r} & \frac{1}{5^r}\cdots\cdots\cdots & \frac{1}{(n+1)^r}
\end{pmatrix}$$

من الواضح أن حاصل ضرب حدود المصفوفة يساوي $\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)^{nr}$. نرمز : $S_n = \sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i^r}$.

حسب النتيجة 3 نستنتج أن:

$$\prod_{j=1}^{n} S_n = (S_n)^n > \sqrt[n]{\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)^{nr}}\, n^n = \frac{n^n}{((n+1)!)^r}.$$

أي أن لكل n>1 طبيعي يتحقق أن $S_n > \frac{n}{\sqrt[n]{((n+1)!)^r}}$. بهذا نكون قد

أثبتنا النتيجة الآتية:

نتيجة 6: لكل n>1 طبيعي و r حقيقي موجب، يتحقق أن

$$\sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i^r} > \frac{n}{\sqrt[n]{((n+1)!)^r}} \,.$$

هذا التباين ليس مفاجئاً فهو نتيجة مباشرة من العلاقة بين المعدل الحسابي والعدل الهندسي أو العلاقة بين المعدل الهندسي والمعدل التوافقي.

3. نعرّف المصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ . & . & . & . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \; . \; . \; . & . \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

مجموع حدود السطر الاول = n ومجموع حدود السطر الثاني = n-1

وبشكل عام مجموع حدود السطر i = n-i-1 . لذلك فإنّ: $\prod_{j=1}^{n} S_j = n!$

أمّا حاصل ضرب حدود المصفوفة فهو يساوي $\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} j^j} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j}\right)^j$.

حسب النتيجة 3 ينتج أنّ: $\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{j=1}^{n} j^j}} \cdot n^n > n!$. وهي تكافئ:

$\prod_{j=1}^{n} j^j > \left(\frac{n^n}{n!}\right)^n$. بهذا نكون قد استنتجنا النتيجة الآتية:

نتيجة 7: لكل n>1 طبيعي يتحقق أن $\prod_{j=1}^{n} j^j > \left(\frac{n^n}{n!}\right)^n$.

ببليوغرافيا

Abramovich, S., Mond, B., and Pecaric, J.E., Sharpening Holderws Inequality, *J. Math*. Annal. Appl. 196 (1995) p. 1131-1134.

אישוויונים מעניינים

עלי עותמאן

במאמר זה אני מציג הוכחת אי-שוויון קושי שוורץ ומספר תוצאות ממנו. מציג הוכחה של אי שוויון הולדר ואי שוויון הממוצעים כתוצאה ממנו. אציג הוכחה של הכללה לאי שוויון הולדר ואראה את מקרה השוויון בצורה מטריציונית. במאמר הרבה אי שוויונים המתקבלים כתוצאות מאי השוויונים המפורסמים קושי שוורץ והולדר.