جامعة 15 (2011/1433)، 54-25

تطوير طرق تفكير رياضية متقدمة من خلال بحث رسوم بيانية لدوال مركبة

تسنيم ذياب، حسام حاج يحيى ونمر بياعة

تلخيص:

يتطرق هذا المقال إلى كيفية تمثيل الرسوم البيانية لدوال مركبة ناتجة عن إزاحة للدالة جبرياً أو بيانياً وإلى التأثير المتبادل بين التمثيلين. سيُظْهِر هذا المقال تأثير البارمترات المختلفة في التمثيل الجبري على شكل الرسم البياني للدالة وسنطبق استنتاجاتنا على الحالة الخاصة لدالة القيمة المطلقة، وسيتطرق إلى اكتشاف أنماط بيانية لبناء التمثيل الجبري المناسب للرسم البياني المعروض.

بالطبع، إنّ الفائدة من هذا المقال لا تنحصر بفهم صفات ومِيّزات دالة القيمة المطلقة فقط، إنما تمتد لأهمية استخدام التكنولوجيا في تدريس الرياضيات وإلى التلاعب في التمثيلات الرياضية من أجل اكتشاف أنماط وظواهر وعلاقات، من أجل توسيع الرؤية والفهم الرياضي لدى التلميذ. من الجدير ذكره، أنه يمكن رسم الدوال يدويا، أي أنه يمكن تدريس الموضوع بدون استخدام التكنولوجيا، إلا أنها جاءت كوسيلة لتسهيل، تدقيق، وتوضيح الخطوات المتبعة عند إجراء التغييرات على الدوال جبرياً وبيانياً.

كذلك يكشف هذا المقال أمام المعلم طرق عمل تساعده على تطور طرق التفكير بمستوى متقدم وتحليلات رياضية إبداعية تمكنه من رفع مستوى التفكير الرياضي أثناء النقاشات والحوارات الرياضية الإبداعية مع تلاميذه.

يحاول هذا المقال تطبيق وتذويت أهداف المنهاج الجديد ليس في المضامين الرياضية المطروحة فيه فقط ، وإنما في الأهداف البيداغوغية والرياضية وطرق التفكير التي يشدد عليها هذا المنهاج.

المقدمة:

إن هذا المقال يستعرض كيفية تمثيل الرسوم البيانية لدوال مركبة ناتجة عن إزاحة للدالة جبرياً أو بيانياً وإلى التأثير المتبادل بين التمثيلين، إضافة إلى تطرقه لطرق عمل تطوّر طرق التفكير بمستوى متقدم وتحليلات رياضية إبداعية لدى التلاميذ، وبهذا فهو يحاول تطبيق أهداف المنهاج الجديد ليس فقط في المضامين الرياضية المطروحة فيه، وإنما أيضا في الأهداف البيداغوغية والرياضية وطرق التفكير التي يركز عليها هذا المنهاج.

من خلال التعامل مع دالة القيمة المطلقة سيتم توضيح، كيف طبقت أهداف المنهاج من خلال هذا الموضوع.

وبالنسبة للمنهاج الجديد فهو يرتكز على الأمور التالية:

- إن منهاج الرياضيات الآن هو عبارة عن تحديث لمنهاج الرياضيات الذي كتب عام 1990. المنهاج برمته يضم مواضيع تم تعليمها سابقا في الصفوف السابعة، الثامنة والتاسعة لكن بترتيب مختلف مع إضافة مواضيع أخرى.
- تعتمد هذه التغييرات على تجربة معلمين ومرشدين وتعليقات بالنسبة لتطبيق المنهاج القديم كما تعتمد على نتائج أبحاث أجريت على تدريس الرياضيات في المرحلة الإعدادية.
- يعتبر هذا المنهاج استمرارية للمنهاج في المدرسة الابتدائية، إضافة إلى انه يقترح الإنتقال إلى طرق تفكير رياضية متقدمة أكثر. المنهاج الجديد يشكل أساس لاستمرار تعليم الرياضيات في الصفوف العليا من حيث المواضيع وأيضا طرق التفكير.

أما أهداف المنهاج فهي:

1. إدراك المفاهيم الرياضية والتعرف عليها.
2. تطوير مهارات التفكير الرياضية، ومنها:

- **بحث حالات وظواهر تغيّر في الرياضيات وغيرها من مجالات الدراسة في الحياة اليومية. دراسة تطور الظواهر من منظور رياضي، من خلال بناء علاقات رياضية بين مكوناتها، بحيث يتم وصف العلاقات بالكلمات أو باللغة الرياضية.**
- **استخدام طرق تمثيل متنوعة للظواهر والحالات (تمثيلات لفظية، تمثيل عددي، تمثيلات بيانية، التمثيل في لغة الرموز) والمعابر بينهما، واستغلال عملياتها الجبرية.**
- **تنمية القدرة على التفسير أو الحل بطريقة البرهان.**

3. منع التلاميذ من الشعور بالفشل، وتقريب الموضوع منهم.

بالطبع يمكن تطبيق هذه الأهداف في دالة القيمة المطلقة، وهذا ما يتطرق إليه المقال أيضا، فلو نظرنا إلى الأهداف لرأينا أنه يمكن تطبيقها وذلك وفق ما يلي:

1. **بالنسبة للهدف الأول**: يتعرف التلميذ على دالة القيمة المطلقة، بمفهومها الجبري والبياني إضافة إلى إدراك كافة المفاهيم الرياضية المرتبطة بالقيمة المطلقة، على سبيل المثال: العلاقة بين الأعداد الموجهة والقيمة المطلقة، وكذلك مع محور الأعداد..
2. **بالنسبة للهدف الثاني:** من خلال تدريس الطلاب القيمة المطلقة، يتطور لدى الطلاب الكثير من مهارات التفكير الرياضية وخاصة فيما يتعلق بالرسوم البيانية المختلفة وكذلك التمثيلات المتنوعة المرتبطة بتأثير البارامترات. إضافة إلى ذلك تتطور لديهم القدرة على تعميم نظرية أو قانون وذلك من خلال رصد ظواهر بيانية مختلفة ويرتقون إلى الحل من خلال البرهان.

وبهذا فالتلميذ يحصل على العديد من التعزيزات وطرق التفكير التي تجعله يرى الأمور بزوايا مختلفة خاصة من خلال بنائه لعلاقات بين المفاهيم الرياضية المرتبطة بدالة القيمة المطلقة، بحيث يتسع مفهوم القيمة المطلقة ليكون مصطلحا أعم وأشمل.

3. **أما بالنسبة للهدف الثالث:**

من المهم الأخذ بعين الاعتبار أن يكون تمثيل الرسوم البيانية لدوال مركبة ناتجة عن إزاحة لدالة القيمة المطلقة جبرياً أو بيانياً موضوعا شيقا ويشع نجاحا من خلال تدريسه بطرق عصرية عن طريق التكنولوجيا، حيث نقرب الموضوع لواقع الطلاب ليكون واضحا أكثر. وكلما كان موضوع القيمة المطلقة مفهوما أكثر يشعر الطلاب بالثقة ويرحل عنهم الشعور بالفشل وذلك لأنهم فهموا كل شيء عن الموضوع مما يولّد لديهم الشعور بالنجاح.

بالتأكيد، إن التشديد على تطبيق مثل هذه الأهداف في كل موضوع وليس فقط في دالة القيمة المطلقة، من شأنه أن يحدث تغييرا في تطرق التلميذ لكافة الأمور المتعلقة في الموضوع فهو يصبح يرى الأمور بشكل أعمق ويبدأ بالتحليل من أجل التوصل إلى استنتاجات تجعله يدرك ما يفعله، فممكن بتطرق التلميذ لموضوع معين أن يتكشف علاقات أو حتى قوانين، لذلك من المهم أن يجرب التلميذ ويبدع في إبراز قدراته عند تعلمه لأي شيء جديد وهذا لا ينحصر في

مجال (موضوع) القيمة المطلقة فحسب وإنما هو يستطيع أن يبادر وأن يكون خلاقا في أي مجال يريد أو يختاره.

القيمة المطلقة ومكانها في المنهاج:

يدرّس موضوع القيمة المطلقة في الصف السابع، ضمن باب " **الأعداد الموجهة** " بحيث يتم التركيز على مفهوم القيمة المطلقة بتعريفها على أنها بعد عدد عن الصفر على محور الأعداد دون التطرق إلى الاتجاه، إضافة إلى التعرف على رمز القيمة المطلقة وهو: | |.

مثال: $|3| = |-3| = 3$

ترتبط القيمة المطلقة بمواضيع أخرى، فكما ذكرت سابقا فهي تندرج تحت موضوع " الأعداد الموجهة " وذلك للتعبير عن بعد العدد الموجب أو السالب عن الصفر، إضافة إلى أن لها صلة مع موضوعي " المتباينات والمعادلات "، لذلك من المفضل تعليم القيمة المطلقة بعد مراجعة هذين الموضوعين قبل.

يتطور تمثيل القيمة المطلقة من صورتها الجبرية أو الكلامية لتمثيلها عن طريق الرسوم البيانية، فنرى في صفوف متقدمة، كيفية تمثيل هذا النوع من الدوال بيانيا بحيث يتم بحث الدوال ومن ثم رسمها للحصول على دالة تصف العلاقة بين الأعداد.

استخدام أدوات تكنولوجية وارتباط ذلك بتمثيل الدالة القيمة المطلقة:

يوصي منهاج الرياضيات بدمج أدوات تكنولوجية رقمية كبرنامج (Excel) وكذلك بيانية كبرنامج (Winplot)، والتي أنشِئَت خصيصا لتعلم واستكشاف الرياضيات، وذلك على خلاف الأدوات التي تنفذ عمليات حسابية. فمثلا إن استخدام برنامج (Winplot) يساعد على رسم دوال القيمة المطلقة بشكل رائع، ومع ذلك يمكن رسم هذه الدوال يدوياً.

استخدام هذه الأدوات التكنولوجية خلال التدريس والتعليم يتم بمستويات مختلفة، بحيث توظف كل أداة لوظيفة معينة والتي من شأنها أن تساعد الطلاب على فهم المصطلحات والقوانين الرياضية.

فإضافة إلى استخدام الوسائل التكنولوجية والتي هدفها تنفيذ عمليات رياضية، هناك أهمية كبيرة لدمج وسائل بيانية (برامج حاسوب، حاسبة بيانية وانترنت).

إن هذا الاستخدام يسلط الضوء على التعليم من خلال الرسوم لفهم معنى الأجسام الرياضية مثل فهم رسوم دوال القيمة المطلقة والتي تتغير بِتَغَيّر البارامترات. فالرسم البياني يعني إعطاء تمثيل مرئي بالإضافة إلى تمثيلات أخرى. وبهذه الطريقة فهي تتوجه للذكاء البصري بحيث توسع فهمهم.

لذا فهناك استخدامات للوسائل البيانية في تعلم الرياضيات:

- رسم سريع ومريح لأمثلة متعددة أثناء الدرس.
- افتراض وخلق التعميم بعد النظر في العديد من الأمثلة.
- فحص النتائج لعمل التلميذ بشكل ذاتي ومستقل.
- توضيح مفاهيم جديدة، تتجاوز التفسير اللفظي.

يوصى بدمج هذه الوسائل التكنولوجية في خلال الحصة وأيضا ضمن الوظائف البيتية.

إن الطرق المتنوعة في تدريس الرياضيات، وبالذات استخدام أدوات الرسم لوصف وتمثيل الدوال بصورة بصرية كتمثيل الدالة المطلقة، من شأنها أن تعزز الدافعية عند الطلاب، بحيث تخلق جوا من الإثارة والمتعة في مراحل الدرس المختلفة. ويقوم كل تلميذ بالفحص والتجريب بنفسه مما يعزز التفكير التلقائي وكذلك ينمي لديه طرق تفكير متقدمة ومركبة نوعا ما.

فالربط ما بين التمثيلات المختلفة للدالة جبريا وبصريا وبيانيا يجعل من مفهوم الدالة مفهوما أشمل وأعمق خاصة أن التلميذ يتعامل مع الدالة من عدة جوانب مما يدعوه أن يربط أفكاره ببعضها ومن ثم التوصل إلى استنتاجات جديدة.

فعلى سبيل المثال: دالة القيمة المطلقة والتي نعنى بالتحدث عنها كونها لب الموضوع، صحيح أننا نفهمها كمصطلح لكن ماذا لو رسمناها أيضا ألن يفيدنا ذلك في استيعاب الموضوع بشكل أنجع وأفضل ؟؟!!

لذلك لا بد للمعلم أن يحرص على أن مثل هذه التمثيلات تقرب صورة الموضوع إلى التلميذ أكثر مما يجعله يفكر بطريقة مختلفة عن قبل وهذا ما نصبو إليه اليوم كمعلمين ، أي أن يعبر التلميذ أو أن يفسر ما يعرفه بطرق متنوعة وبالأخص بطرق التي تستخدم التكنولوجيا.

على المعلم أن يطرح مشكلة أمام الطلاب ومنها عليه أن ينطلق لتعليم الموضوع، فمن خلال ذلك يستشعر الطلاب الحاجة للمعرفة عن هذا الموضوع.

طريقة كهذه تجعل الطلاب يخوضون تجربة التحليل، الاكتشاف الرياضي كعلماء الرياضيات المختصين من خلال تحليل ظواهر، اكتشاف علاقات ومفاهيم داخلية ...

على سبيل المثال: **لو سأل المعلم الطلاب عن تحركات دالة معينة، ماذا يحدث عندما كذا..؟**

ما هي التغييرات التي تحدث للتمثيل الجبري / البياني للدالة إذا أزحنا الدالة إلى (اليمين / اليسار/ الأعلى / الأسفل) ؟

كل هذه الأسئلة من شأنها أن تعود التلميذ على إثارة التساؤلات: كيف، ماذا، لماذا، متى .... للتوصل في النهاية إلى حل بعد عبور وتخطي العديد من العقبات وبعد تفكير عميق للربط بين ما نراه ونفكر به، وبهذه الحالة نكون قد وصلنا بطلابنا إلى مرحلة متقدمة من التفكير.

بعد التحدث عن استخدام التكنولوجيا وارتباط ذلك بالقيمة المطلقة، إذا نسأل أنفسنا كيف يمكن تقييم عمل التلاميذ؟!

نحن كمعلمين بالتأكيد لدينا معايير معينة لتقييم التلاميذ، ولكن أيضا يستطيع التلميذ تقييم نفسه بنفسه.

ولذلك فإن طرق التقييم تكون كالآتي:

1. يجب أن يكون التقييم مدمجاً مع التعليم، بحيث يتوجب المتابعة بعد إجراء كل مهمة، فمثلا إعطاء التلاميذ ورقة عمل استدراجية بعد التعلم عن موضوع دالة القيمة المطلقة أو إذا كان العمل محوسبًا أي كالتعلم بواسطة أبلتات على سبيل المثال، فيستطيع المعلم

أن يطلب من الطلاب رصد وتسجيل ماذا يحدث للدالة عند تغيير بعضا من المتغيرات. ويتعين علينا أن نستمع إلى منطق الطلاب وأفكارهم عند تنفيذ العمليات الحسابية.

ويجب الأخذ بعين الإعتبار أن المعايير التي تتخذ كأساس لتقييم قدرة تتطرق إلى جوانب مختلفة. لكن التقييم الذي يعتمد على العلامات يضر بثقة النفس لدى الطلاب ولا يعكس قدراتهم ومهاراتهم. لذا على المعلم أن يقيم وضع التلميذ ومقدرته.

بحيث أن التقييم يتضمن التطرق إلى مراحل التفكير والحل، وليس إلى الإجابات النهائية فقط. ومن أجل أن نحقق هذا الهدف، يجب تنفيذ التقييم بطرق متنوعة.

2. بالإضافة إلى أدوات التقييم الروتينية (كالامتحانات)، من المهم جدا أن نستخدم أدوات تقيم أخرى مثل الملف الشخصي (بورتفوليو) والذي يوثق به مراحل مختلفة خلال التعليم، فمثلا وضع انجازات وإبداعات التلاميذ في موضوع القيمة المطلقة في البورتفوليو.
3. وكذلك من المفضل أن نتساعد بوسائل أخرى مثل: الحوار ومراقبة طريقة عمل الطلاب، وتتبع تعامل الطلاب مع مهام معقدة، إعطاء مهام تتطلب كتابة التفكير الانعكاسي، كأن يكتب الطالب وصفا لتجربته مع دالة القيمة المطلقة، تجربة ممتعة/غير ممتعة ، الصعوبات التي واجهها، كيف تغلب على مثل هذه الصعوبات، كيف حسب رأيه يرتبط موضوع القيمة المطلقة بالحياة اليومية؟ كل هذا من شأنه أن يجعل التلميذ يعبر عن نفسه.

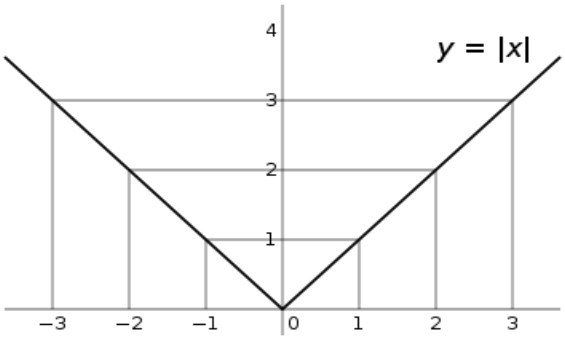
والآن نأتي لنركز على القيمة المطلقة والتي نستطيع التعبير عنها بأي تمثيل نختاره.

مصطلح القيمة المطلقة تاريخيا:

بدأ استخدام مصطلح القيمة المطلقة في القرن التاسع عشر، أما الرمز فقد أدخله عالم الرياضيات الألماني كارل ويرستراس Karl Weierstrass عام 1841.

مدخل إلى القيمة المطلقة:

وكما ذكرت فإن القيمة المطلقة هي بعد عدد عن الصفر. فيمكن أن نعبر عنها بالرسم البياني وذلك عن طريق الرسم التالي:



وبطريقة جبرية:

لأي عدد حقيقي a القيمة المطلقة يرمز لها بالرمز | a | وتعرف بـ:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{if } a \geq 0 \\ -a, & \text{if } a < 0. \end{cases}$$

ومن ثم نرتقي بالدالة المطلقة لنتوصل إلى التعبير بواسطتها عن دوال الخطوط المنكسرة عن طريق كتابة دالة القيمة المطلقة الملائمة لها والتعبير عنها بيانيا، وبهذا يتعرف التلميذ على دالة القيمة المطلقة، بمفهومها الجبري والبياني، وهذا تطبيق للهدف الأول بالمنهاج: "إدراك المفاهيم الرياضية والتعرف عليها"، وكذلك تطبيق للهدف الثاني: "تطوير مهارات التفكير الرياضية"، حيث يمكن التعبير عن دالة القيمة المطلقة بطرق تمثيل متنوعة كثيرة.

لذلك سنتعرض معا مقدمة عن دالة القيمة المطلقة الأم وتمثيلاتها المختلفة وتأثير البارامترات ولنرى كيف يتم تطبيق وتذويت أهداف المنهاج:

من المهم جدا أن نعرض مقدمة للتلاميذ عن أي موضوع نود تدريسه من أجل أن يكون لديهم خلفية ولو سطحية عنه، لكي نشاركهم في النقاش والحوار قبل الدخول لعمق وصلب الموضوع. من المهم إجراء محادثة ولو بسيطة أو حتى تمهيد من أجل أن نطلع التلاميذ على الأمور التي سنتطرق لها. وبحديثنا عن القيمة المطلقة كدالة، من الواضح أن المعلم يجب عليه أن يبدأ بعرض رسوم الدوال الأساسية وهي دوال الأم وما يجري عليها من تغيرات ليستطيع التلاميذ التعامل مع التمثيلات المشتقة من دوال الأم بكل سهولة، وتكون البداية كالتالي:

لرسم دوال أساسية وهي دوال الأم يجب أن نجري عليها أحيانا العديد من العمليات والتي تتمثل في عمليات الإزاحة الأفقية (يمين ويسار) أو العمودية (إلى أعلى أو إلى أسفل) أو بالتماثل بالنسبة لكلا المحورين (إما لمحور x أو لمحور y) .

هذه العمليات يمكن إدراجها كالآتي:

a>0	العملية
f(x)=g(x-a)	إزاحة الرسم إلى اليمين a خطوات
f(x)=g(x+a)	إزاحة الرسم إلى اليسار a خطوات
f(x)=g(x)+a	إزاحة الرسم إلى أعلى a خطوات
f(x)=g(x)-a	إزاحة الرسم إلى أسفل a خطوات
f(x)= -g(x)	تماثل بالنسبة لمحور x
f(x)= g(-x)	تماثل بالنسبة لمحور y

من خلال الجدول هناك أيضا تطبيق للهدف الأول بالمنهاج لأن التلميذ يتعرف ويدرك مفاهيم ومصطلحات رياضية من الإزاحة والتماثل.

وبما أننا سنعالج موضوع رسم الدوال المطلقة الأم عندما تكون مكونة من مثلث واحد أو أكثر، سنستعين بهذه العمليات المذكورة ، بحيث تساعدنا على ايجاد هذه الدوال .

- هناك 3 حالات للرسوم التي تحوي دوال مطلقة على هيئة مثلثات وهي:

1. رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثا واحدا .
2. رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثين .
3. رسم لدالة مطلقة يحوي 3 مثلثات.

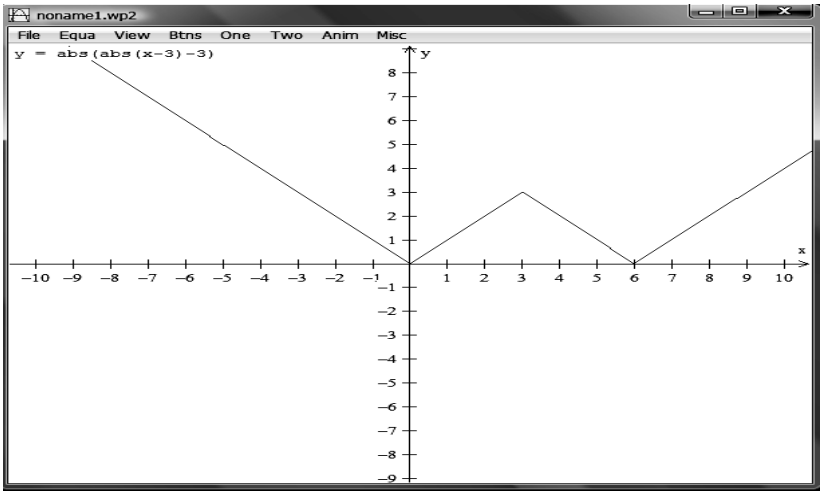
وبهذا سنفسر طريقة الوصول إلى الدوال الأم لكل حالة من الحالات المذكورة.

تفصيل كل رسم من الرسوم:

ملاحظة: المثلثات متساوية الساقين، وهذه الدوال هي دوال متواصلة.

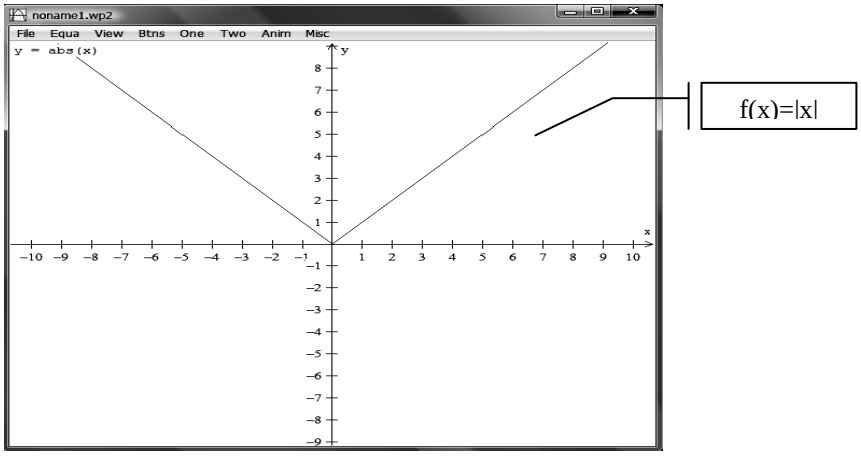
- رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثا واحدا متساوي الساقين، في قطعة معينة فيها طول الارتفاع نصف طول القاعدة، واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 1).

مثال1: معطى هذا الرسم الذي فيه مثلث قاعدته 6 وارتفاعه 3. كيف يمكن ايجاد الدالة الأم له؟

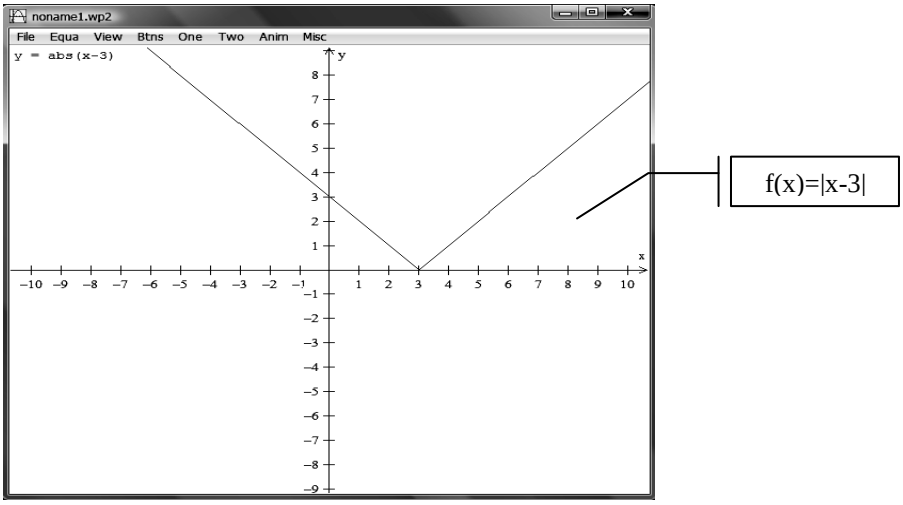


مراحل الحل: (يقوم التلميذ بتتبع جميع الخطوات للتوصل إلى المعادلة الملائمة للدالة الأم)

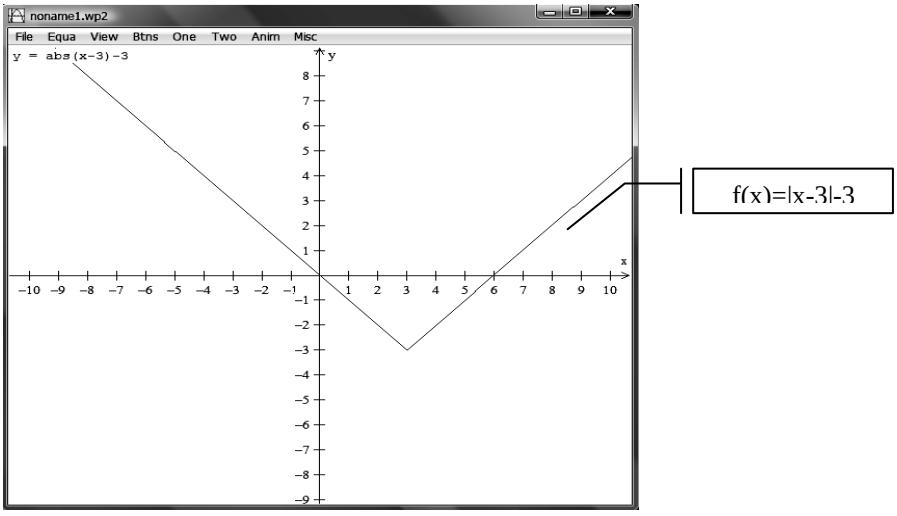
1. نرسم دالة القيمة المطلقة الأم – تطبيق للهدف الثاني:



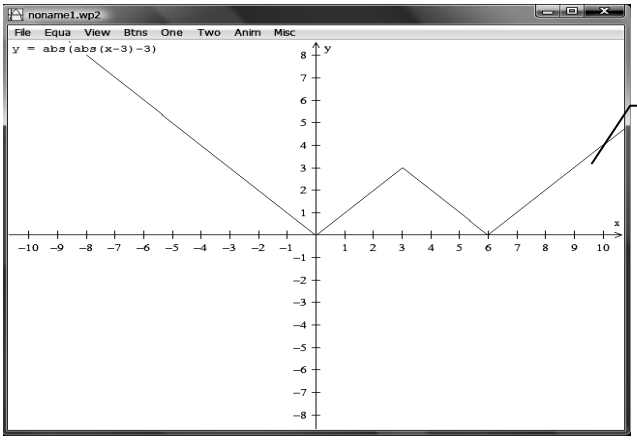
2. إزاحة أفقية لليمين بمقدار 3 وحدات – التلميذ يدرك مصطلح الإزاحة وها هو يمثله بيانيا إذا يظهر تطبيق وتذويت للمنهاج:



3. إزاحة عمودية للأسفل بمقدار 3 وحدات:



4. تماثل بالنسبة لمحور x (قَلْبْ القسم الموجب ليصبح في القسم السالب) لحالة 3 – ادراك مصطلح التماثل ومن ثم تمثيله بيانياً:



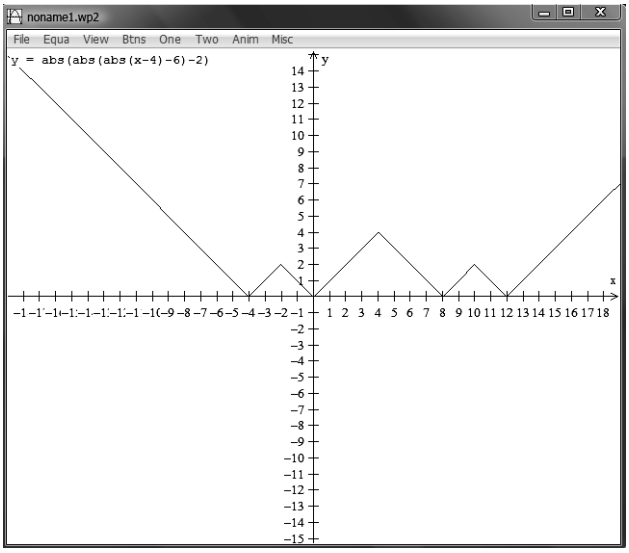
ملاحظة: لم يتم اضافة أي مثلث

لقد قمنا بشرح عملية تعميم العلاقة بين العمليات الجبرية والنتائج البيانية، وتركنا برهان هذا التعميم للقارئ المعني بذلك، حيث يمكن استخدام طرق رياضية متقدمة لإثبات التعميم. بالطبع هذه التعميمات هي أساليب رياضية لاكتشاف نظريات جديدة، ولكن لا يكتمل هذا التعميم إلا بالبرهان الرياضي. (سنتخذ هذا لباقي التعميمات)

ليتوصل التلميذ للتعميم عليه أن يقوم بالتجريب أكثر من مرة ولعدة أطوال وعند توصله له سيشعر أنه وجد شيئا ما جديدا هو اكتشفه بنفسه وبهذا نرى أن أهداف المنهاج تطبق وتُذوّت من خلال التعامل مع هذه الدوال.

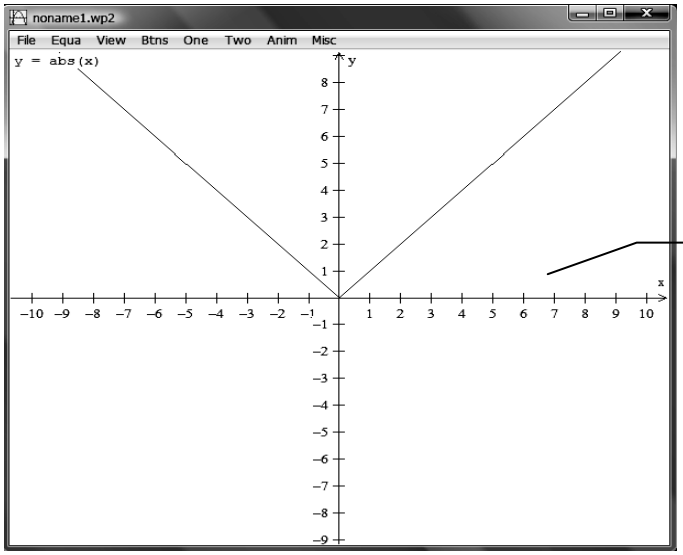
- ❖ رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثين (من جهة اليمين) ذوات ارتفاعات تنازلية مختلفة في قطعة معينة فيها طول كل الارتفاع يساوي نصف طول القاعدة النازل عليها واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 2)
- تطوير طرق تفكير كونه تطور عدد المثلثات ليكون 2 بدلا من 1 وبهذا سنرى كيف سيتعامل التلاميذ مع هذا الوضع؟

مثال 2: معطى هذا الرسم ارتفاع المثلث على اليسار هو 4 وقاعدته 8 والمثلث من اليمين ارتفاعه 2 وقاعدته 4. كيف يمكن ايجاد الدالة الأم له ؟

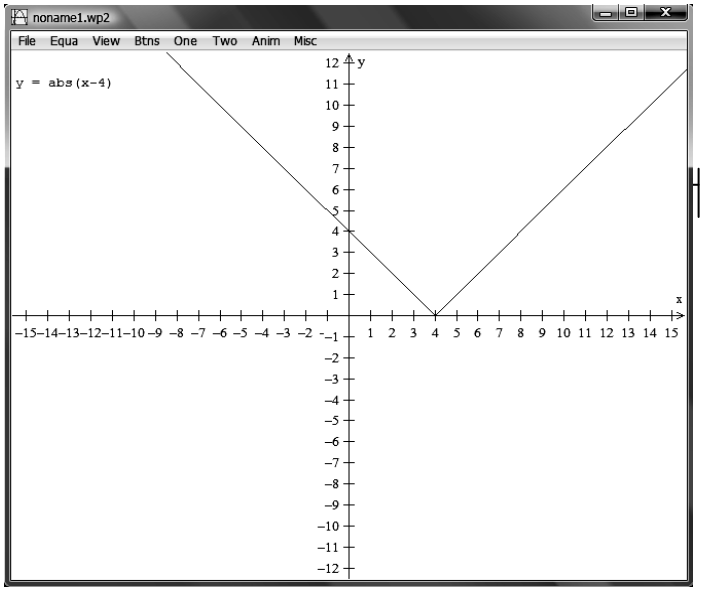


مراحل الحل (على التلاميذ ادراك المفاهيم ليستمروا):

1. نرسم دالة القيمة المطلقة الأم – تمثيل جبري وبياني:

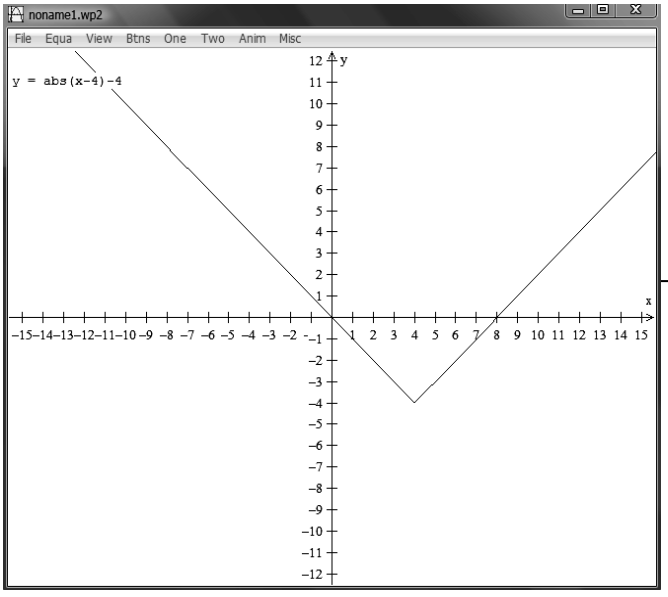


2. إزاحة أفقية لليمين بمقدار 4 خطوات- ادراك لمصطلح الإزاحة:



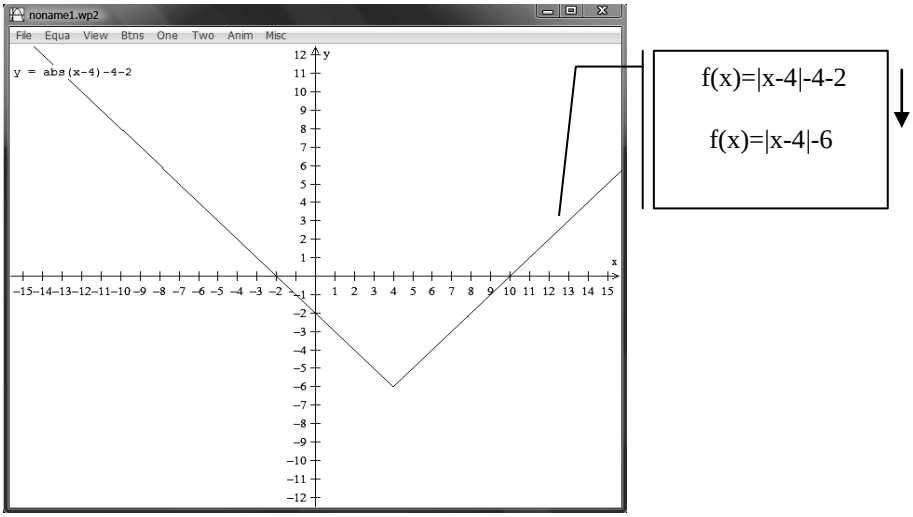
f(x)=|x-4|

3. إزاحة عمودية للأسفل بمقدار 4 خطوات:

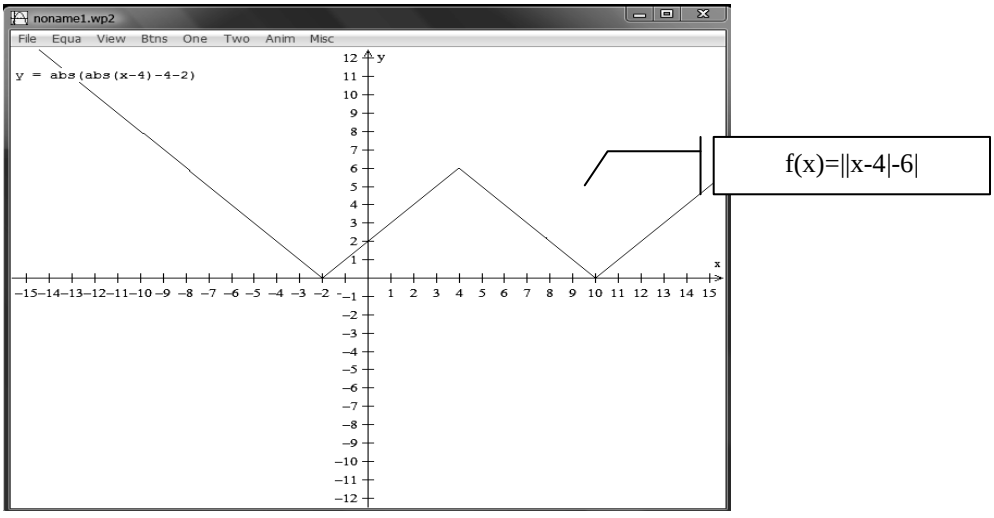


f(x)=|x-4|-4

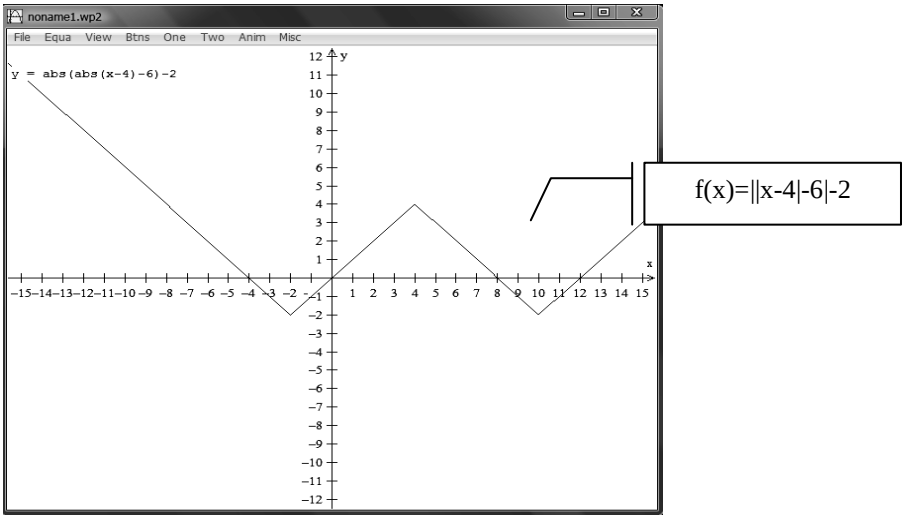
4. إزاحة عمودية إلى الأسفل بمقدار 2 خطوات:



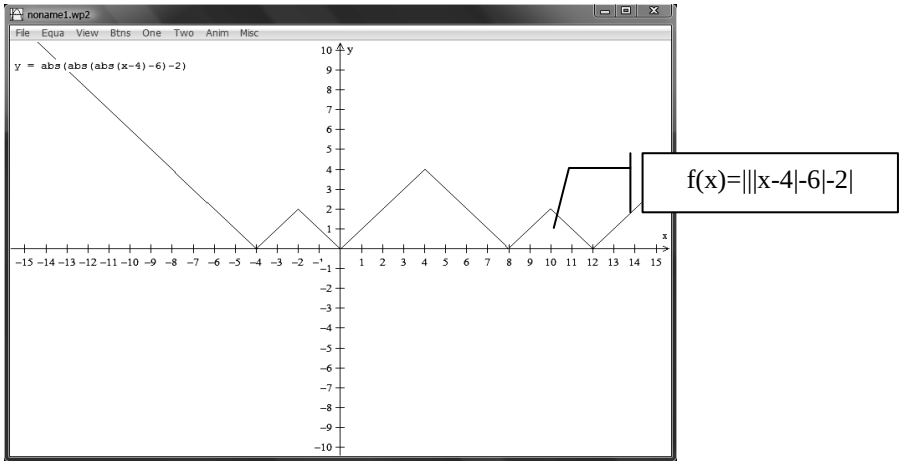
5. تماثل بالنسبة لمحور x (قَلْبْ) لحالة 4 :



6. إزاحة عمودية للأسفل بمقدار خطوتين:

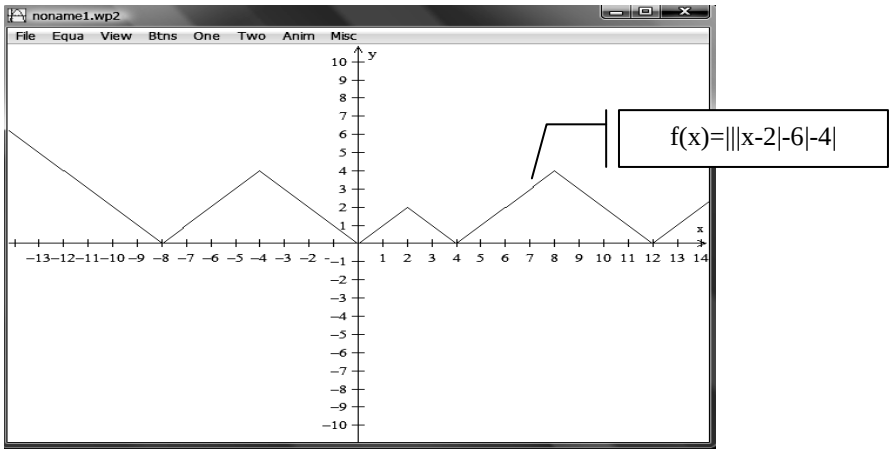


7. تماثل بالنسبة لمحور x (قَلْبْ القسم السالب ليصبح في القسم الموجب) لحالة 6:



- رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثين (من جهة اليمين) ذوات ارتفاعات تصاعدية مختلفة في قطعة معينة فيها طول كل الارتفاع يساوي نصف طول القاعدة النازل عليها واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 3)

مثال 3: معطى هذا الرسم ارتفاع المثلث على اليسار هو 2 وقاعدته 4 والمثلث من اليمين ارتفاعه 4 وقاعدته 8 . كيف يمكن إيجاد الدالة الأم له؟



ملاحظات تتعلق بالرسم:

1. إذا كانت الارتفاعات في المثلثين تنازلية: يتم اضافة المثلث ذي الارتفاع الأصغر في الربع الثاني.
2. إذا كانت الارتفاعات في المثلثين تصاعدية: يتم اضافة المثلث ذي الارتفاع الأكبر في الربع الثاني .

ملاحظة: تم اضافة مثلث واحد فقط. إما المثلث الكبير أو الصغير حسب ما تم ذكره سابقا.

كما هو ملاحظ، هنا التلاميذ يحتاجون إلى تفكير أعمق وأكثر شمولية، بحيث يجب عليهم الانتباه إلى قضية الارتفاعات إن كانت تنازلية أو تصاعدية، ماذا يحدث في كل واحدة من الحالات؟

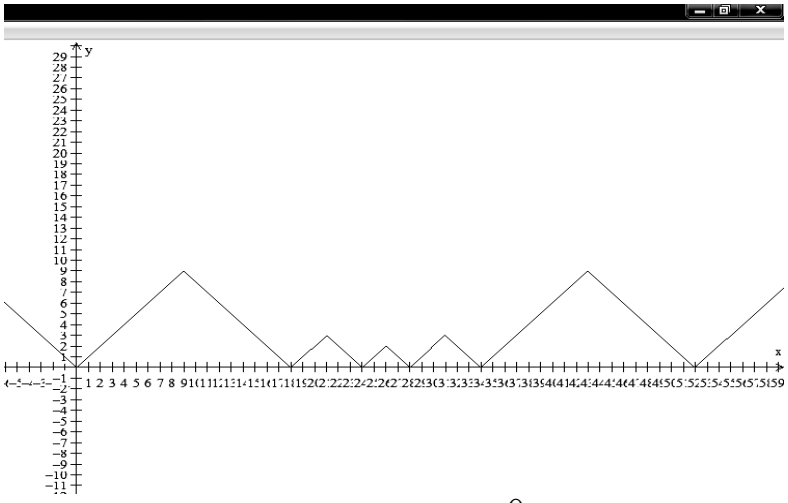
لذلك من خلال التدرب والتجربة، بتعلم التلاميذ رصد وملاحظة جميع التغيرات التي تحدث على الدالة وما التشابه وما الاختلاف بينها؟

لذلك هنا التلاميذ يطوّرون مستوى أعلى من التفكير وأيضا من المهارات الرياضية المتقدمة.

❖ رسم لدالة مطلقة يحوي 3 مثلثات متساوية الساقين ذوات ارتفاعات تنازلية مختلفة في قطعة معينة فيها طول كل الارتفاع يساوي نصف طول القاعدة النازل عليها واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 4)

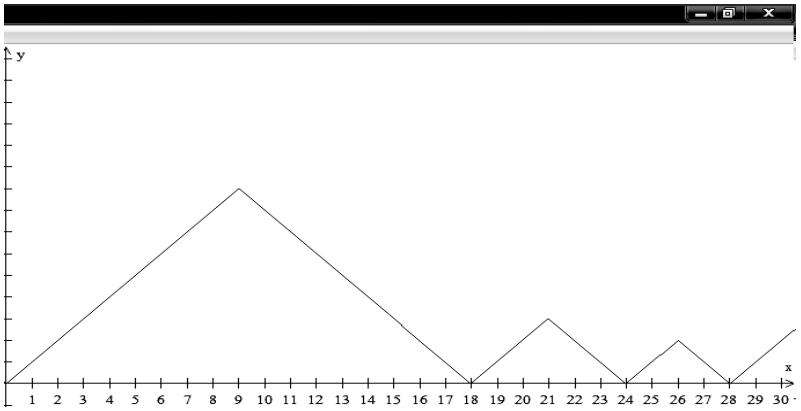
- مرحلة متقدمة جدا، لذلك على التلاميذ أن يكونوا أكثر عمقا في التفكير.

مثال 4: معطى هذا الرسم. كيف يمكن ايجاد الدالة الأم له؟



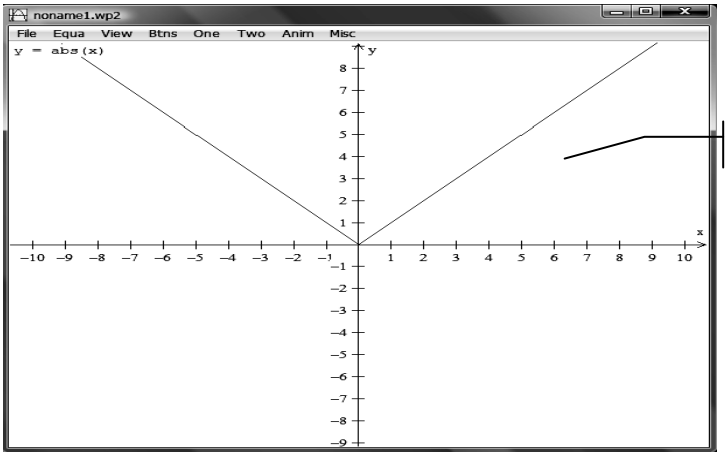
نقاط صفرية: $0,18,24,28,34,52$

سنأخذ المقطع التالي- يجب أن يفهم التلاميذ انه من المهم أحيانا التعامل مع الجزء لتطبيق ذلك على الكامل:

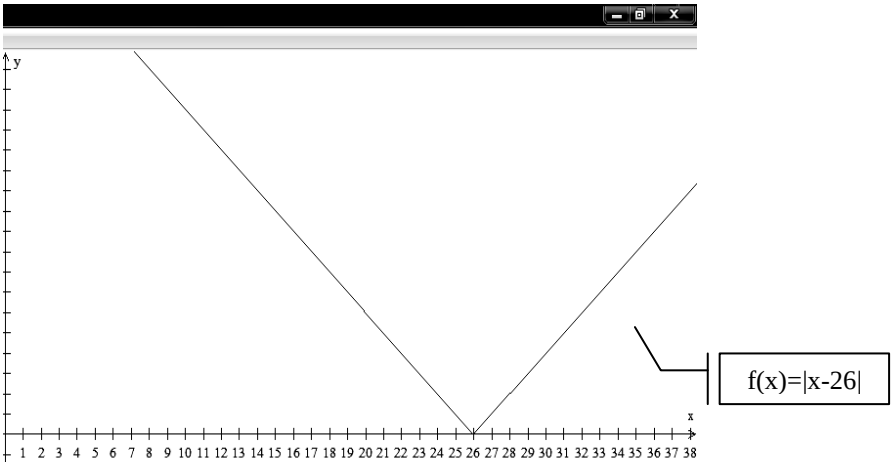


مراحل الحل:

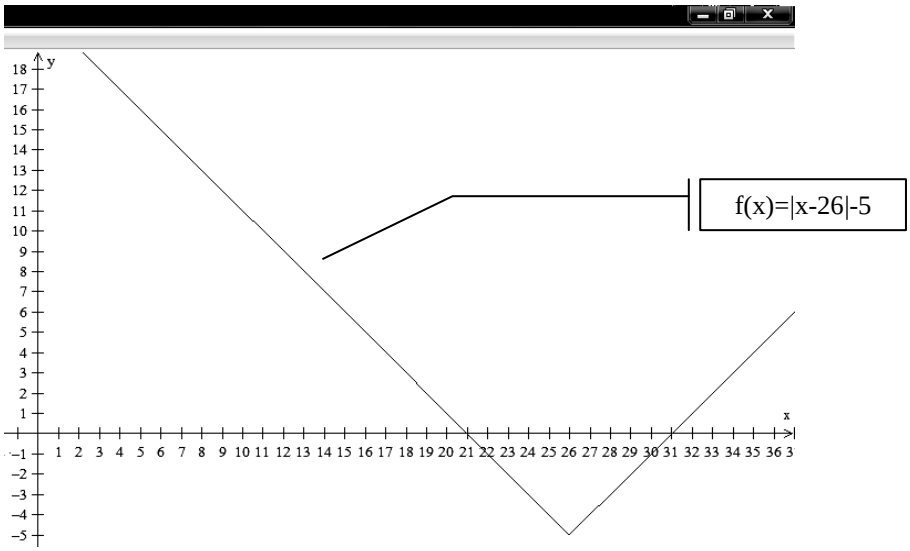
1. نرسم دالة القيمة المطلقة الأم:



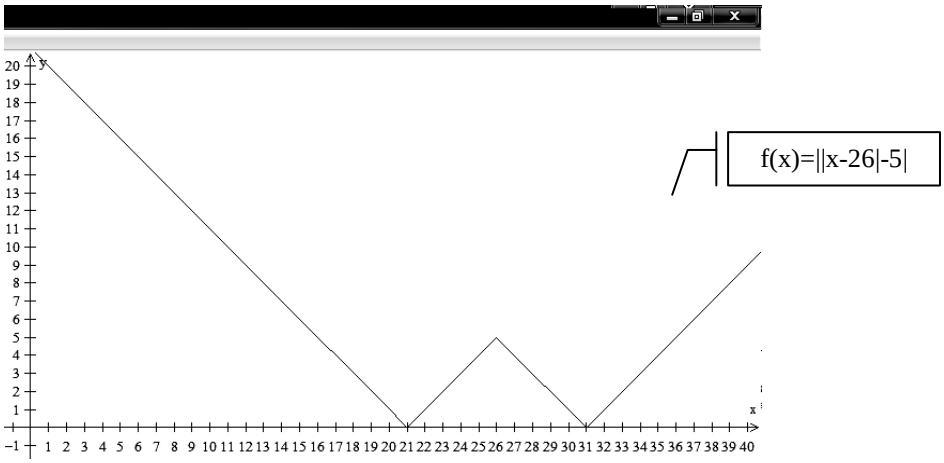
2. إزاحة أفقية لليمين بمقدار 26 خطوة-المفروض أن يكون التلاميذ في مرحلة متقدمة من الإدراك والفهم للمصطلحات والمفاهيم الرياضية:



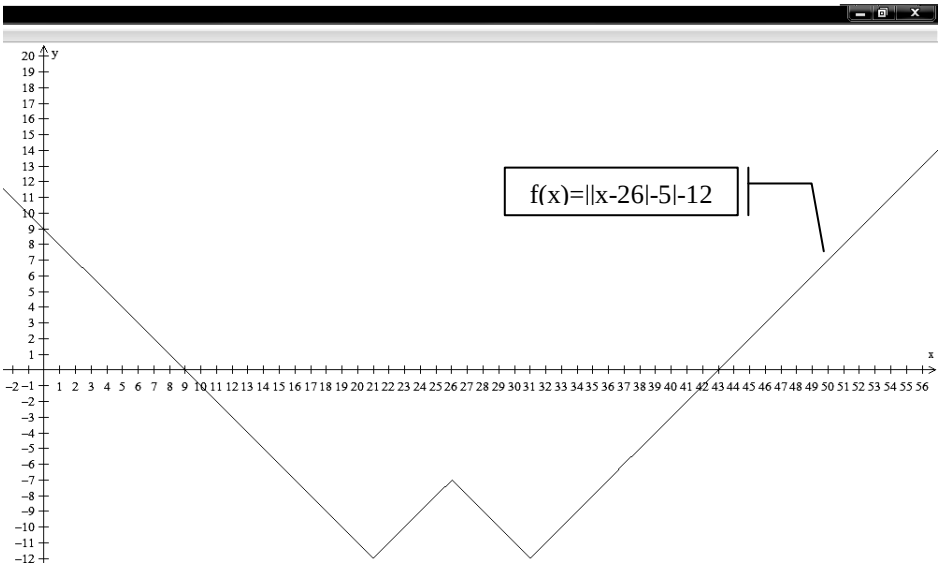
3. إزاحة عمودية للأسفل بمقدار 5 خطوات:



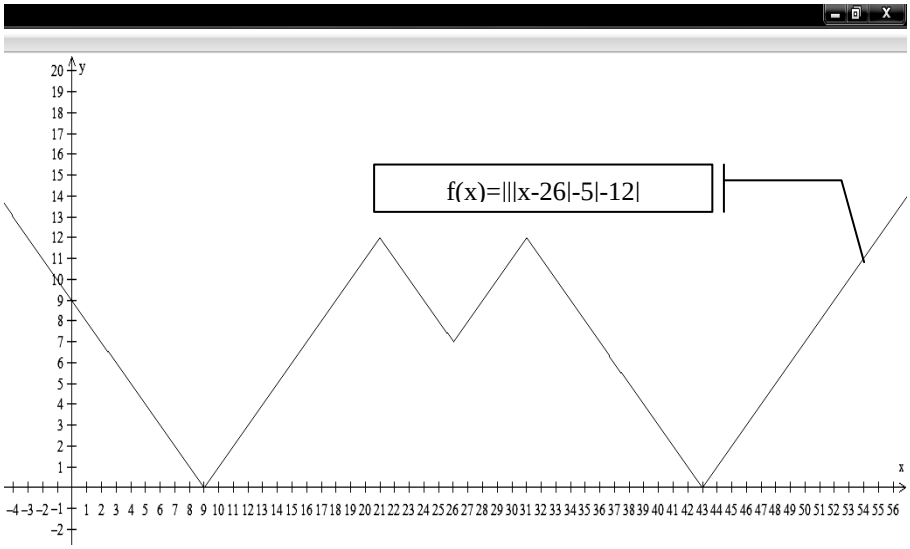
4. تماثل بالنسبة لمحور x (قَلْبْ القسم السالب ليصبح في القسم الموجب) لحالة 3:



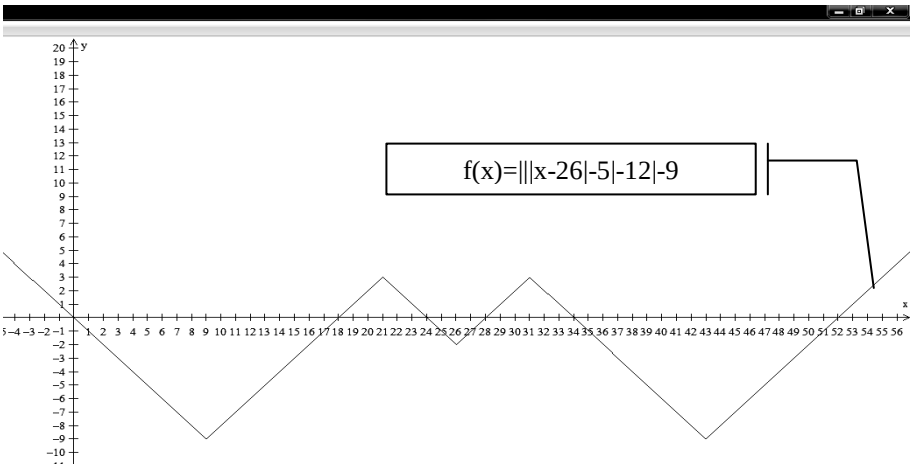
5. إزاحة عمودية للأسفل بمقدار 12 خطوات:



6. تماثل بالنسبة لمحور x (قَلْبُ القسم السالب ليصبح في القسم الموجب) لحالة 5:

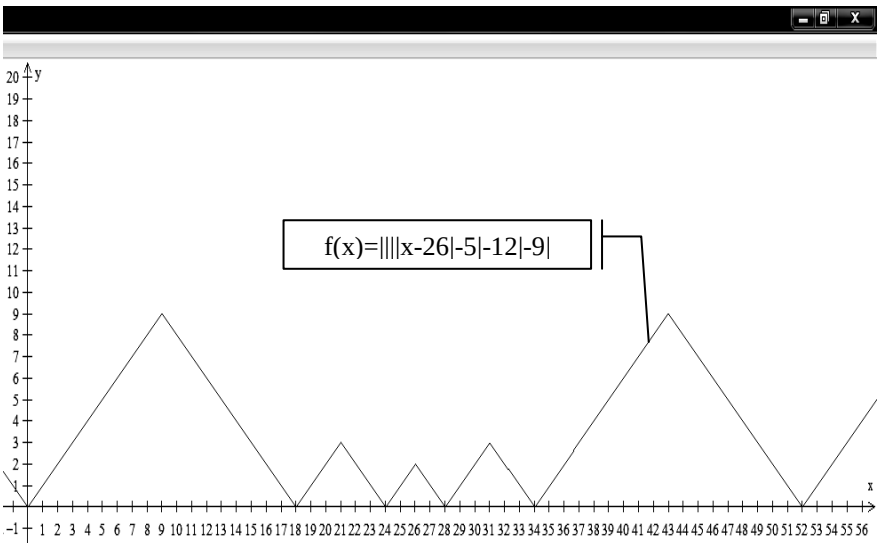


7. إزاحة عمودية للأسفل بمقدار 9 خطوات:



المعادلة معقدة قليلا، وهنا التلاميذ يكونوا في مستوى عال من التفكير، لأنهم بحاجة إلى ربط الأمور ببعضها.

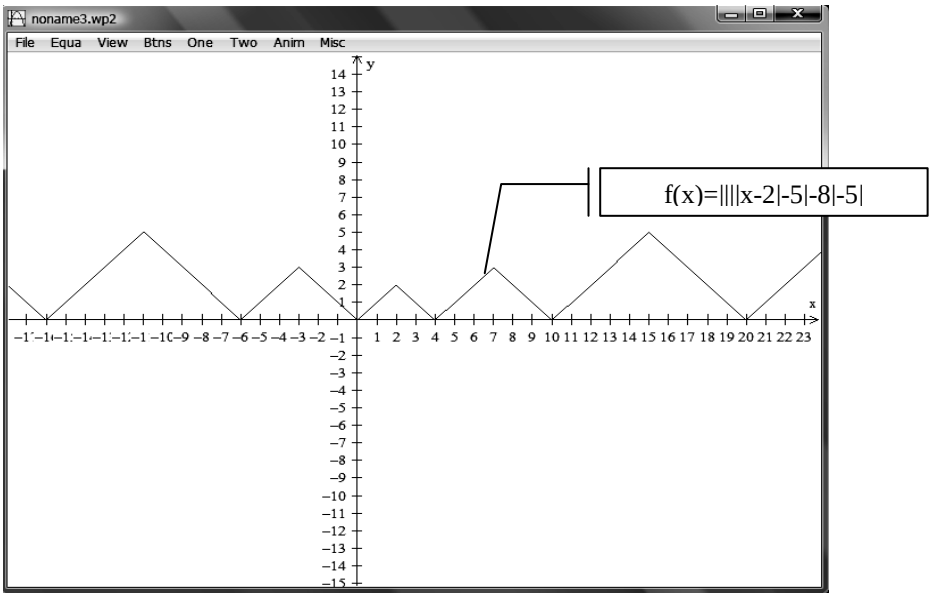
8. تماثل بالنسبة لمحور x (قَلْبْ القسم السالب ليصبح في القسم الموجب) لحالة 7:



كذلك الرسوم تبدو مختلفة وصعبة عن سابقها، لكن اذا تمرن التلاميذ بشكل حِرَفي ورائع سيكون التعامل مع هذه الدوال سهلا جدا. خاصة وأنهم يرتقون إلى التعميم في كل مرة.

- رسم لدالة مطلقة يحوي 3 مثلثات متساوية الساقين ذوات ارتفاعات تصاعدية مختلفة في قطعة معينة فيها طول كل الارتفاع يساوي نصف طول القاعدة النازل عليها واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 5)

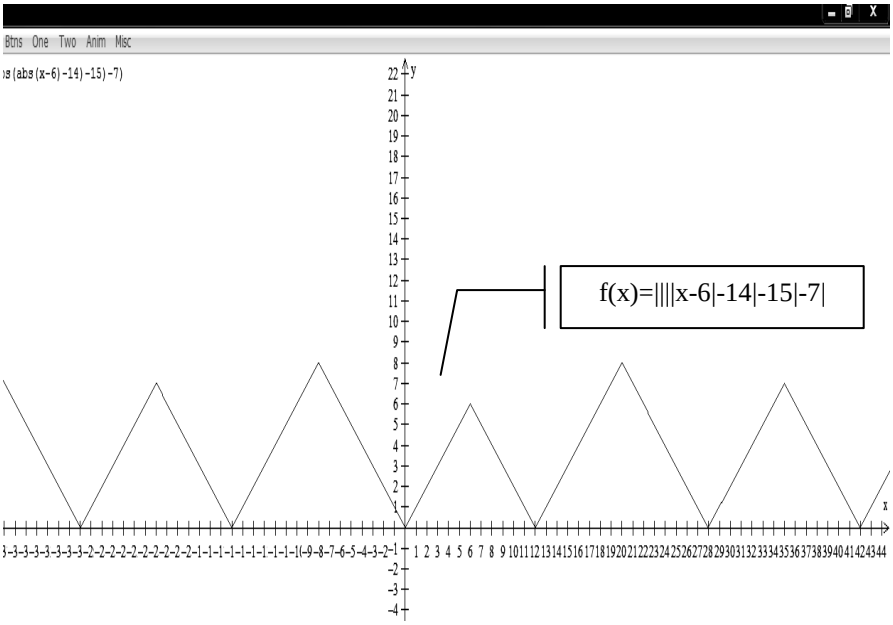
مثال 5: معطى هذا الرسم. كيف يمكن ايجاد الدالة الأم له ؟



- رسم لدالة مطلقة يحوي 3 مثلثات متساوية الساقين ذوات ارتفاعات مختلطة مختلفة (ليست تصاعدية أو تنازلية) بحيث الرسم من اليسار في الربع الأول يبدأ بمثلث إرتفاعه أصغر من ارتفاع المثلث الموجود في اقصى اليمين في الربع الأول في قطعة معينة فيها طول كل الارتفاع يساوي نصف طول القاعدة النازل عليها واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 6)

- الوضع بدأ يزداد صعوبة والرسومات أكثر تعقيدا، لكن هذا ما يصنع التحدي !!

مثال 6: معطى هذا الرسم بحيث الرسم من اليسار في الربع الأول يبدأ بمثلث ارتفاعه 6 وهو أصغر من ارتفاع المثلث الموجود في أقصى اليمين في الربع الأول وهو 7. كيف يمكن ايجاد الدالة الأم له؟

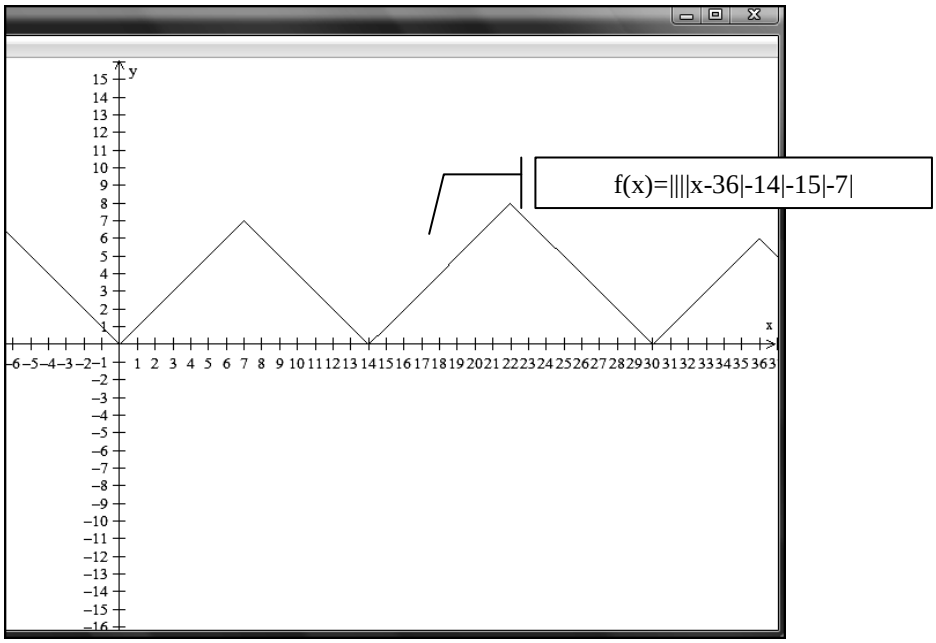


ملاحظة: أضيف مثلثان فقط.

- رسم لدالة مطلقة يحوي 3 مثلثات متساوية الساقين ذوات ارتفاعات مختلطة مختلفة (ليست تصاعدية أو تنازلية) بحيث الرسم من اليسار في الربع الأول يبدأ بمثلث ارتفاعه أكبر من ارتفاع المثلث الموجود في الربع الأول في قطعة معينة فيها طول كل الارتفاع يساوي نصف طول القاعدة النازل عليها واستمراريته هي خطوط مستقيمة (كما هو مبين في المثال 7)

كذلك يبدو التمثيل غريبا لكن ممتاز لتحدي تفكير التلاميذ!

مثال 7: معطى هذا الرسم بحيث الرسم من اليسار في الربع الأول يبدأ بمثلث ارتفاعه 7 وهو أكبر من ارتفاع المثلث الثالث الموجود في الربع الأول وهو 6. كيف يمكن ايجاد الدالة الأم له ؟



ملاحظة: أضيف مثلثان فقط .

قبل الوصول إلى التعميم، يجب التأكد من تطبيق أهداف المنهاج لدى التلاميذ، أي تقييم مرحلي لكل مرحلة ومرحلة وبهذا يعرف المعلم وضع التلاميذ.

إن التعميم في هذه المرحلة يبدو صعبا، لكن بالتأكيد ليس مستحيلا، وذلك لصعوبة ما مر به التلاميذ من مراحل للحل لإيجاد الدالة الأم.

ملاحظات تتعلق بالرسم:

1. إذا كانت الارتفاعات في المثلثين تنازلية: يتم اضافة/نسخ المثلثين الموجودين على أقصى اليسار في الربع الأول إلى اليمين في الربع الأول لكن بترتيب معكوس ويبلع المثلث صاحب الإرتفاع الأصغر.

2. اذا كانت الإرتفاعات في المثلثين تصاعدية: يتم اضافة /نسخ المثلثين الموجودين على أقصى اليمين في الربع الأول إلى الربع الثاني لكن بترتيب معكوس ويبلع المثلث صاحب الإرتفاع الأصغر.

3. إذا كانت الارتفاعات في الثلاث مثلثات مختلطة مختلفة (ليست تصاعدية ولا تنازلية) هناك حالتين:

3.1 إذا كان الرسم من اليسار في الربع الأول يبدأ بمثلث ارتفاعه أصغر من ارتفاع المثلث الموجود في أقصى اليمين في الربع الأول فانه يتم نسخ / اضافة المثلثين الموجودين على أقصى اليمين في الربع الأول إلى الربع الثاني لكن بترتيب معكوس ويبلع المثلث صاحب الإرتفاع الأصغر.

3.2 إذا كان الرسم من اليسار في الربع الأول يبدأ بمثلث إرتفاعه أكبر من ارتفاع المثلث الثالث الموجود في الربع الأول فانه يتم نسخ / اضافة المثلثين الموجودين على أقصى اليسار في الربع الأول إلى اليمين في الربع الأول لكن بترتيب معكوس ويبلع المثلث صاحب الإرتفاع الأصغر.

ملاحظة: تم اضافة مثلثين حسب ما ذكر أعلاه.

استنتاج:

عندما كان لدينا مثلث واحد ← أضيف 0 مثلثات .

عندما كان لدينا مثلثين ← أضيف مثلث واحد .

عندما كان لدينا ثلاث مثلثات ← أضيف مثلثان .

لذلك إذا كان لدينا k مثلثات ← سيضاف k-1 مثلثات .

في حال توصل التلميذ إلى مستوى الاستنتاج وتصنيف القوانين وإدراكها، فبهذا فهو طور مهارات إدراكية ومفهومية عالية جدا، وقد تطور لديه الحس الرياضي بشكل رائع.

كما رأينا فإن كل حالة من الحالات تتطور وتتعقد كلما زاد عدد المثلثات، إلا أن المبدأ هو نفسه في بناء المعادلة. من المهم جدا إدراك مصطلحات مثل: إزاحة بكافة أنواعها، التماثل بالنسبة للمحورين، والقلْب (أي قلب الرسم البياني). وفي كل تغيير على التلاميذ رصد وتسجيل ماذا يحصل للدالة، وعندما يجربون كل حالة أكثر من مرة، تتطور لديهم مهارات تفكير رياضية، ويصبحون قادرين أكثر على الربط بين المفاهيم الرياضية المختلفة. وبهذا بعد التجريب يستطيعون التوصل إلى التعميم وهذا ما يرمي إليه المعلم، بعد أن يتأكد ويقيم ما تم تعليمه عن الدوال الأم.

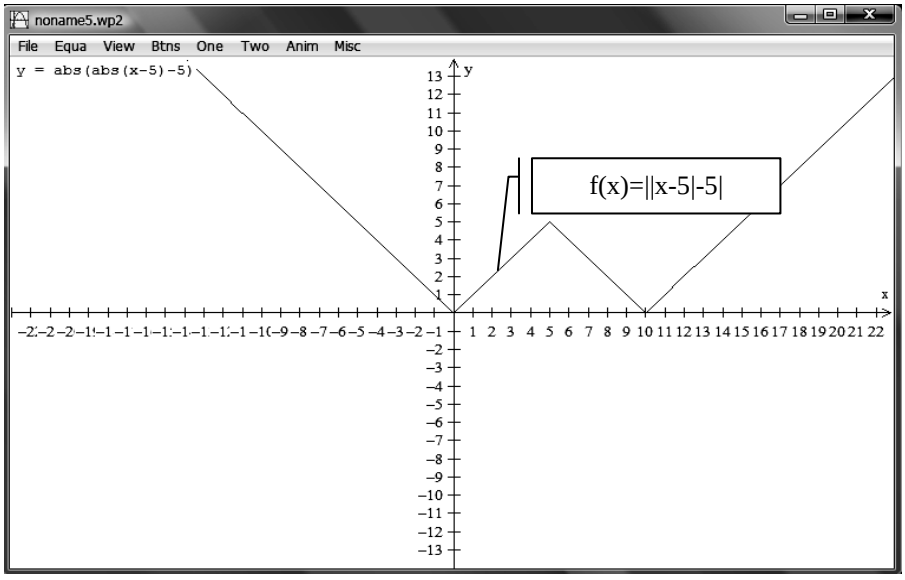
من الجدير ذكره أنّ على المعلم تدريب التلاميذ على كل مادة يدرسها وحتى لو استغرق الأمر حصصا عديدة، ولذلك يجب أن يقوم بطرح أسئلة عليهم تتعلق بالموضوع.

وها هنا بعض من الأمثلة التي يمكن أن يفحص بها المعلم مدى فهم التلاميذ لدالة القيمة المطلقة الأم مع كافة التغييرات التي يمكن الحصول عليها في حين تغير أحد البارامترات.

أمثلة:

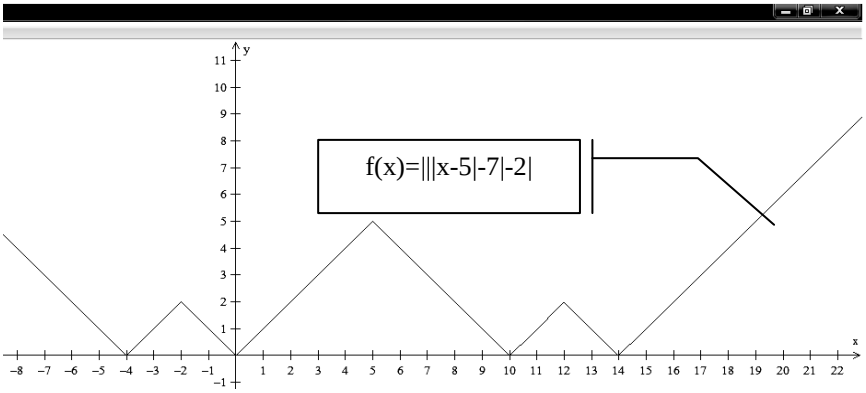
مثال (1):

رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثا واحدا متساوي الساقين.



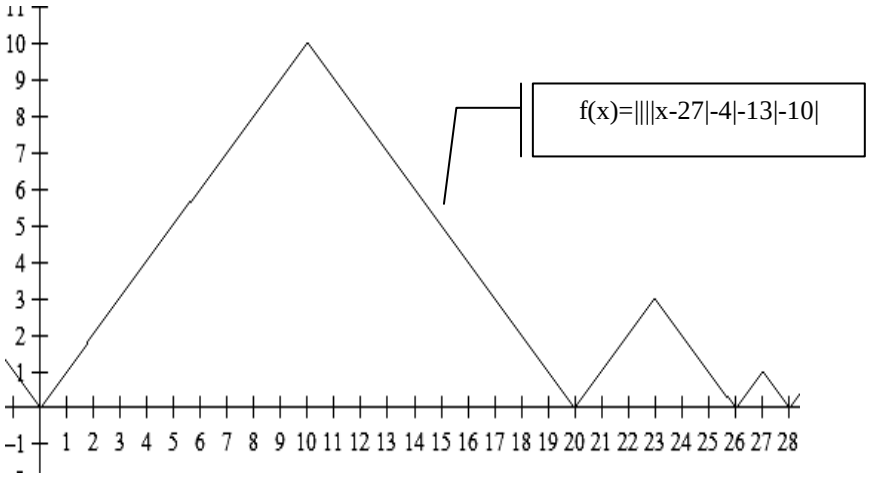
مثال (2):

رسم لدالة مطلقة يحوي مثلثين (من جهة اليمين): طبعا هناك أيضا على اليسار



مثال (3):

رسم لدالة مطلقة يحوي 3 مثلثات متساوية الساقين فما فوق:



الخاتمة:

تم في هذا المقال استعراض كيفية تمثيل الرسوم البيانية لدوال مركبة ناتجة عن إزاحة للدالة جبرياً أو بيانياً وإلى التأثير المتبادل بين التمثيلين. وقد تطرق هذا المقال لتأثير البارمترات المختلفة في التمثيل الجبري على شكل الرسم البياني للدالة وطبقنا استنتاجاتنا على الحالة الخاصة لدالة القيمة المطلقة، وقد تطرق أيضا إلى اكتشاف أنماط بيانية لبناء التمثيل الجبري المناسب للرسم البياني المعروض.

لقد تم عرض لمحة عن المنهاج الجديد، أهدافه، وكيف تطبق وتذوت أهدافه بالربط مع دالة القيمة المطلقة، حيث تم الربط بين الأهداف وما يتم تعليمه ضمن القيمة المطلقة. لقد كان بحث رسوم بيانية لمتوالية دوال تركيبية لدوال ناتجة عن إزاحة دالة القيمة المطلقة موضوعا رائعا والذي عن طريقه يطور التلاميذ الكثير من طرق التفكير الرياضية وهذا ما عَمَد إليه المقال بشكل أساسي. مع ذلك فإن الجمال لا ينحصر على القيمة المطلقة حيث يتم معالجة دالة تركيبية بدوال تربيعية وبهذا من المشوّق التعرف على الموضوع وبحثه والقراءة عنه أو حتى تجربته.

لذلك نحن كمعلمين يجب علينا توظيف الموضوع في المكان والوقت المناسب طبعا مع استخدام حكيم للتكنولوجيا كالأبلتات وبرامج بيانية مثل: GSP (The Geometer's), Winplot Sketchpad، وبرامج أخرى مثل: Microsoft Office. حيث أن جميع هذه البرامج غنية بكل ما هو مفيد للتلاميذ ليس فقط تساعد في موضوع القيمة المطلقة وإنما في كافة المواضيع.

ومثل هذه البرامج تقرب الموضوع للتلاميذ وتُشْعِرُهم أنهم يمسكون بزمام الأمور وبهذا يشعرون بالنجاح ويبتعدون عن الشعور بالفشل، وبهذا يُطبَّق الهدف الثالث من المنهاج وهو: "منع التلاميذ من الشعور بالفشل، وتقريب الموضوع منهم".

باختصار، على المعلم أن يكون مدركا لأهمية دمج التكنولوجيا مع المواضيع التعليمية في أي موضوع كان ونوصي بهذا الدمج بشكل دائم مع أنه يمكن تدريس أي موضوع دون استخدام التكنولوجيا.

תקציר:

מאמר זה מתייחס להצגת גרף של פונקציה מרוכבת הנוצר מהזזת הפונקציה אלגברית או גרפית, וגם להשפעה ההדדית בין שני הייצוגים. מאמר זה מציג את ההשפעה של פרמטרים שונים בייצוג אלגברי על צורת הגרף של הפונקציה, מיישם את הממצאים שלנו על המקרה המיוחד של פונקציות הערך המוחלט ומתייחס לגילוי דפוסים גרפיים אשר עוזרים בבניית הייצוג האלגברי המתאים לפונקציה המוצגת.

כמובן, התועלת של המאמר לא מוגבלת בהבנת אפיוני ותכונות פונקצית הערך המוחלט בלבד, אלא מבליטה גם חשיבות השימוש בטכנולוגיה בהוראת המתמטיקה במיוחד בהצגת ייצוגים מתמטיים על מנת לזהות דפוסים, תופעות ויחסים ביניהם. זאת במטרה להרחיב את הראייה, התפיסה וההבנה המתמטית של התלמיד. יש לציין שיכולים לשרטט את הפונקציות גם ידנית ובלי להשתמש בטכנולוגיה, כלומר אנו יכולים ללמד את הנושא בלי השימוש בטכנולוגיה, עם זאת, הטכנולוגיה באה כאמצעי להקל, לדייק ולהבהיר את כל השלבים והצעדים בזמן ביצוע השינויים על הפונקציות אלגברית וגרפית.

מאמר זה חושף בפני המורה דרכי עבודה העוזרות לו בפיתוח דרכי חשיבה מתמטיים יצירתיים ברמה גבוהה, אשר עוזרות לו בהעלאת רמת החשיבה המתמטית במהלך דיונים ודיאלוגים מתמטיים עם תלמידיו.

המאמר מנסה ליישם ולהפנים את המטרות של תכנית הלימודים החדשה, לא רק בתוכן המתמטי, אלא גם במטרות הפדגוגיות המתמטיות, ודרכי החשיבה שמדגישה אותן תכנית הלימודים.