جامعة 15 (2011/1433)، 187-177

القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة التربيعية جبريًا

علي عثمان

تلخيص

أعرض في هذا المقال طريقة بسيطة لإيجاد القيمة القصوى للدالة التربيعية بمتغيرين. هذه الطريقة هي تعميم لطريقة إيجاد القيمة القصوى لدالة تربيعية بمتغير واحد والتي بها ابتدأت المقال. تعتمد الطريقة على فكرة الإكمال للمربع فقط لذا فإنّ طريقة الإيجاد هي جبرية صرف، مما يجعل الموضوع قابلاً للتدريس في نهاية المرحلة الإعدادية للطلاب المتقدمين. لم يتمّ الاعتماد على المشتقات الجزئية ولكن تمّ التوصل إليها وتمّ التوصل إلى محدد **الهيسيان** (انظر (1)). تمّت في المقال معالجة الحالة التي يكون فيها محدد **الهيسيان** مساوياً للصفر، فتمّ التوصل إلى قاعدة بسيطة لتحديد إن كانت النقطة المشبوهة نقطة قصوى أم لا في هذه الحالة.

مقدمة

أعرض في هذا المقال طريقة جبرية لحساب القيمة العظمى أو الصغرى للدالة التربيعية بمتغيرين. هذه الطريقة هي تعميم لطريقة إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى للدالة التربيعية بمتغير واحد والتي تعتمد كلياً على الإكمال إلى مربع. أثناء تدريس موادّ الرياضيات لطلاب قسم الرياضيات الذين يتأهلون ليكونوا معلمين من الضروري أن يهتم المحاضرون بحلّ الكثير من المسائل بعدة طرق لتطوير التفكير الرياضي والإبداعي لديهم وأن يكون بعضها قريبة من الموادّ التي تدرس في المرحلة الإعدادية أو الثانوية. في مساق دوال بعدة متغيرات يتمّ تعليم طريقة لحساب القيمة القصوى لدالة بمتغيرات والتي تعتمد على المشتقات الجزئية ومحدد الهيسيان وهذه الطريقة نافعة في حالة كون محدد الهيسيان يختلف عن الصفر وغير نافعة إن كان المحدد مساويًا للصفر. الطريقة التي كتبتها هنا تحل المسألة عندما تكون الدالة تربيعية بمتغيرين سواء كان محدد الهيسيان صفراً أو يختلف عن الصفر ومن السهل فهمها من قبل تلاميذ المرحلة الإعدادية المتقدمين. هذه الطريقة هي مساهمة مني في بيان جمال الرياضيات وتنوع أساليب حل مسائلها.

ابدأ بمعالجة الدالة التربيعية بمتغير واحد

1. نريد هنا معرفة القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة للدالة التربيعية بمتغير واحد.

لتكن $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث أن $a \neq 0$. فإنّ:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4a}\left(4a^2x^2+4bax+4ac\right) \\ &= \frac{1}{4a}\left((2ax)^2+2b(2ax)+4ac\right) \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-b^2+4ac\right] \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-(b^2-4ac)\right] \end{aligned}$$

نرمز $\vartriangle = b^2-4ac$ ($\vartriangle$ تسمى المميز للدالة التربيعية).

لذلك فإنّ $$f(x)=\frac{1}{4a}(2ax+b)^2-\frac{\vartriangle}{4a}$$

عندما $a>0$ فإنّ للدالة $f(x)$ قيمة صغرى عندما يكون $2ax+b=0$ أي عندما $x=-\frac{b}{2a}$ والقيمة الصغرى هي $-\frac{\vartriangle}{4a}$. النقطة $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\vartriangle}{4a}\right)$ هي نقطة القعر للدالة.

عندما $a<0$ فإنّ للدالة $f(x)$ قيمة عظمى عندما يكون $2ax+b=0$ أي عندما $x=-\frac{b}{2a}$ والقيمة العظمى هي $-\frac{\vartriangle}{4a}$. النقطة $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\vartriangle}{4a}\right)$ هي نقطة قمة للدالة.

في الحالتين $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\vartriangle}{4a}\right)$ تسمى رأس الدالة التربيعية.

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}\left[(2ax+b)^2-\vartriangle\right]$$

لاحظ أن $f'(x)=2ax+b$ (هو مشتقة الدالة).

نأتي الآن لمعالجة الدالة التربيعية بمتغيرين.

2. دالة تربيعية بمتغيرين

نريد هنا معرفة القيمة العظمى المطلقة أو الصغرى المطلقة للدالة التربيعية بمتغيرين.

لتكن $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+k$.

أ. الحالة الأولى المركزية هي عندما $a\neq 0$ وَ $b\neq 0$ (أو $c\neq 0$ و $b\neq 0$). طريقة المعالجة تعتمد على الإكمال لمربع ولا تعتمد على حساب التفاضل.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4a}(4a^2x^2+4abxy+4acy^2)+dx+ey+k \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2-b^2y^2+4acy^2\right]+dx+ey+k \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+4adx+4aey-\vartriangle y^2\right]+k \end{aligned}$$

حالة I: $\vartriangle\neq 0$

$\boxed{\text{حيث أن } \vartriangle = b^2-4ac}$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+2d(2ax+by)+(4ae-2bd)y-\vartriangle y^2\right]+k \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+by+d)^2-d^2+(4ae-2bd)y-\vartriangle y^2\right]+k \\ &= \frac{1}{4a}\left[(2ax+by+d)^2-\vartriangle\left(y^2-2\left(\frac{2ae-bd}{\vartriangle}\right)y+\frac{d^2}{\vartriangle}\right)\right]+k \\ &= \frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2-\frac{\vartriangle}{4a}\left[(y-\frac{2ae-bd}{\vartriangle})^2-(\frac{2ae-bd}{\vartriangle})^2+\frac{d^2}{\vartriangle}\right]+k \end{aligned}$$

نرمز $y_0=\dfrac{2ae-bd}{\vartriangle}$

لذلك فإنّ: $f(x,y)=\dfrac{1}{4a}(2ax+by+d)^2-\dfrac{\vartriangle}{4a}(y-y_0)^2+\dfrac{(2ae-bd)^2}{4a\vartriangle}-\dfrac{d^2}{4a}+k$

لو نفذنا المراحل الملائمة بالنسبة للمتغير y (استبدال y ب x والعكس واستبدال a ب c والعكس واستبدال d ب e والعكس، حيث أن $c\neq 0$)، نحصل على:

$$f(x,y)=\frac{1}{4c}(2cy+bx+e)^2-\frac{\triangle}{4c}(x-x_0)^2+\frac{(2cd-be)^2}{4c\triangle}-\frac{e^2}{4c}+k$$

حيث أنّ $x_0=\dfrac{2cd-be}{\triangle}$, ($\triangle=b^2-4ac$ لا يتغير).

نلاحظ أنّ: $x_0=\dfrac{\begin{vmatrix}-d & b\\ -e & 2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}$ وَ $y_0=\dfrac{\begin{vmatrix}2a & -d\\ b & -e\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{vmatrix}}$

لذلك فإنّ $(x_0\ ,\ y_0)$ هو الحل الوحيد للهيئة:

$$\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases}$$

لذلك فإنّ $$f(x_0,y_0)=\frac{(2ae-bd)^2}{4a\triangle}-\frac{d^2}{4a}+k$$

وكذلك فإنّ $$f(x_0,y_0)=\frac{(2cd-be)^2}{4c\triangle}-\frac{e^2}{4c}+k$$

من السهل التأكد من تساوي المقدارين.

لذلك فإنّ: $f(x,y)=\dfrac{1}{4a}(2ax+by+d)^2-\dfrac{\triangle}{4a}(y-y_0)^2+f(x_0,y_0)$ عندما : $a\neq 0$.

وصيغة أُخرى:

$f(x,y)=\dfrac{1}{4c}(2cy+bx+e)^2-\dfrac{\triangle}{4c}(x-x_0)^2+f(x_0,y_0)$ عندما $c\neq 0$.

حيث أنّ $(x_0\ ,\ y_0)$ هو حل الهيئة $\begin{cases}2ax+by+d=0\\ 2cy+bx+e=0\end{cases}$

من الممكن أيضاً الحصول على الصيغة:

$$f(x,y)=\frac{1}{8a}\left[(2ax+by+d)^2-\vartriangle(y-y_0)^2\right]+\frac{1}{8c}\left[(2cy+bx+e)^2-\vartriangle(x-x_0)^2\right]+f(x_0,y_0)$$

حالة II: $\vartriangle=0$. في هذه الحالة

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+4adx+4aey\right]+k \\ &=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by)^2+2d(2ax+by)-2bdy+4aey\right]+k \\ &=\frac{1}{4a}\left[(2ax+by+d)^2-d^2+2(2ae-bd)y\right]+k \\ &=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+\frac{1}{2a}(2ae-bd)y+k-\frac{d^2}{4a} \end{aligned}$$

نأتي الآن لمعرفة القيمة الكبرى أو القيمة الصغرى للدالة $f(x, y)$.

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2-\frac{\vartriangle}{4a}(y-y_0)^2+f(x_0,y_0)$$

إذا كان $\vartriangle<0$ وَ $a>0$ فإنّ $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ لكل (x,y).

لذلك فإنّ (x_0, y_0) هي النقطة التي تحصل فيها الدالة على القيمة الصغرى المطلقة.

إذا كان $\vartriangle<0$ وَ $a<0$ فإنّ $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$

لذلك فإنّ (x_0, y_0) هي النقطة الوحيدة التي تحصل فيها الدالة على القيمة العظمى المطلقة.

عندما: $\vartriangle>0$ وَ $a>0$

إذا كان (x,y) على المستقيم $2ax+by+d=0$ فإنّ

$f(x,y)=-\frac{\vartriangle}{4a}(y-y_0)^2+f(x_0,y_0)$ وهو يؤول إلى $-\infty$ عندما $|y|$ يؤول إلى ∞.

كذلك فإنّ: $f(x,y_0)=\frac{1}{4a}(2ax+by_0+d)^2+f(x_0,y_0)$ وهو يؤول إلى ∞ عندما $|x|$ يؤول إلى ∞.

لذلك لا تحصل الدالة على قيمة كبرى أو على قيمة صغرى مطلقة.

كذلك الأمر عندما $0<\vartriangle$ وَ $a<0$.

حالة III: عندما $\vartriangle=0$

1) إذا كان $2ae-bd=0$ ، في هذه الحالة فإنّ الدالة هي:

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+k-\frac{d^2}{4a}$$

عندما $a>0$ تحصل الدالة على القيمة الصغرى المطلقة في جميع النقاط الواقعة على المستقيم $2ax+by+d=0$ والقيمة الصغرى المطلقة تساوي $k-\dfrac{d^2}{4a}$.

وعندما $a<0$ تحصل الدالة على قيمتها العظمى المطلقة في جميع نقاط المستقيم $2ax+by+d=0$ والقيمة العظمى المطلقة تساوي $k-\dfrac{d^2}{4a}$.

نلاحظ أن في هذه الحالة (أي عندما $\vartriangle=0$ و $2ae-bd=0$) يكون للهيئة
$$\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases}$$
ما لا نهاية من الحلول لأن المعادلتين في الهيئة متكافئتان. لذلك توجد ما لا نهاية من النقاط الحرجة وهي نقاط المستقيم $2ax+by+d=0$.

معنى الشرط $2ae-bd\neq 0$ هو أن للهيئة $\begin{cases}2ax+by+d=0\\ bx+2cy+e=0\end{cases}$ لا يوجد حل. وهو يكافئ القول: المعادلتان متناقضتان.

عندما $\vartriangle=0$ و $2ae-bd\neq 0$ فإنّ الدالة هي

$$f(x,y)=\frac{1}{4a}(2ax+by+d)^2+\frac{1}{2a}(2ae-bd)y+k-\frac{d^2}{4a}$$

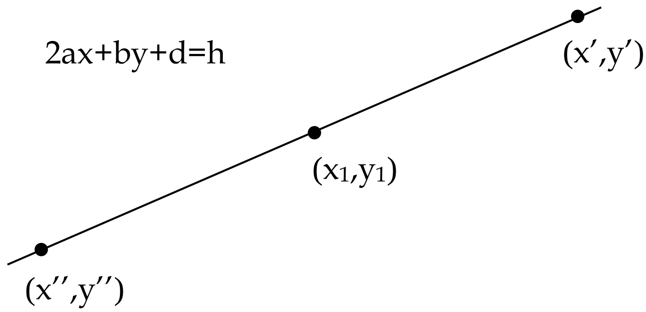
فإنّ لكل نقطة $(x_1\,,y_1)$ إذا تحقق أن $2ax_1+by_1+d=h$ فإنّ

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{4a}h^2 + \frac{1}{2a}(2ae - bd)y_1 + k - \frac{d^2}{4a}$$

لذلك إذا كانت (x', y') وَ (x'', y'') على المستقيم في جهتين مختلفتين من النقطة (x_1 , y_1) فمن المؤكد $2ax + by + d = h$

أن إحدى القيمتين $f(x', y')$ وَ $f(x'', y'')$

أكبر من $f(x_1 , y_1)$ والأخرى أصغر من $f(x_1 , y_1)$ (انظر الشكل)



لذلك فإن $f(x_1 , y_1)$ لا يمكن أن تكون نقطة نهاية صغرى أو عظمى أي أن للدالة لا توجد قيمة عظمى ولا توجد قيمة صغرى.

ملاحظة: نلاحظ أن الهيئة $\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$ ، المعادلة الأولى فيها هي مشتقة الدالة $f(x, y)$ حينما نعتبر y متغيرا وَ x ثابتا.

الأولى هي المشتقة الجزئية للدالة $f(x, y)$ حسب x والثانية هي المشتقة الجزئية للدالة $f(x, y)$ حسب y.

مثال 1: $f(x, y) = 4x^2 + 7xy + 5y^2 - 4x + 12y$

افحص أن كان للدالة قيمة كبرى أم صغرى، جدها في حالة وجودها وجد النقاط التي تحصل فيها الدالة عليها.

أ) حسب القاعدة ب) بشكل مباشر.

أ) حل: $\Delta = 7^2 - 4\cdot 4\cdot 5 = -31 < 0$ وَ $a = 4 > 0$. للدالة توجد قيمة صغرى. لمعرفة النقطة التي تحصل فيها الدالة على القيمة الصغرى نحل الهيئة

$$\begin{cases} 8x + 7y - 4 = 0 \\ 7x + 10y + 12 = 0 \end{cases}$$

حل الهيئة هو $(x_0\ , y_0) = (4, -4)$

$$f_{\min} = f(4, -4) = -32$$

ب) حل مباشر (من أجل فهم طريقة الإيجاد).

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(16x^2 + 28xy + 20y^2) - 4x + 12y$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4x + \frac{7}{2}y)^2 - (\frac{7}{2}y)^2 + 20y^2\right] - 4x + 12y$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4x + \frac{7}{2}y)^2 + \frac{31}{4}y^2\right] - 4x + 12y$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4x + \frac{7}{2}y)^2 - 16x + 48y\right] + \frac{31}{16}y^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4x + \frac{7}{2}y)^2 - 4(4x + \frac{7}{2}y) + 62y\right] + \frac{31}{16}y^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4x + \frac{7}{2}y)^2 - 4(4x + \frac{7}{2}y)\right] + \frac{31}{16}y^2 + \frac{31}{2}y$$

$$= \frac{1}{4}\left[(4x + \frac{7}{2}y - 2)^2 - 4\right] + \frac{31}{16}(y^2 + 8y)$$

$$= \frac{1}{4}(4x + \frac{7}{2}y - 2)^2 + \frac{31}{16}(y + 4)^2 - 31 - 1$$

$$= \frac{1}{16}(8x + 7y - 4)^2 + \frac{31}{16}(y + 4)^2 - 32$$

القيمة الصغرى للدالة هي 32- عندما $y_0 = -4$ وَ $x_0 = 4$.

مثال 2: عالج الدالة $f(x,y)=x^2+6xy+9y^2-8x-12y$

1) حل حسب القاعدة: $\vartriangle = 6^2-4\cdot 1\cdot 0=0$

$$2ae-bd=2\cdot 1\cdot(-12)-6\cdot(-8)=24\neq 0$$

لا يوجد للدالة قيمة صغرى أو عظمى مطلقة.

2) حل مباشر:

$$\begin{aligned} f(x,y)&=(x+3y)^2-8(x+3y)+12y \\ &=(x+3y-4)^2+12y-16 \\ f(4-3y,y)&=0^2+12y-16 \end{aligned}$$

عندما y تؤول إلى ∞ فإن قيم الدالة تؤول إلى ∞.

عندما y تؤول إلى $-\infty$ فإن قيم الدالة تؤول إلى $-\infty$.

كذلك لا يوجد للدالة نقطة نهاية عظمى أو صغرى محلية.

لو فرضنا أن (x_1,y_1) نقطة حرة في المستوى وأن $x_1+3y_1-4=h$

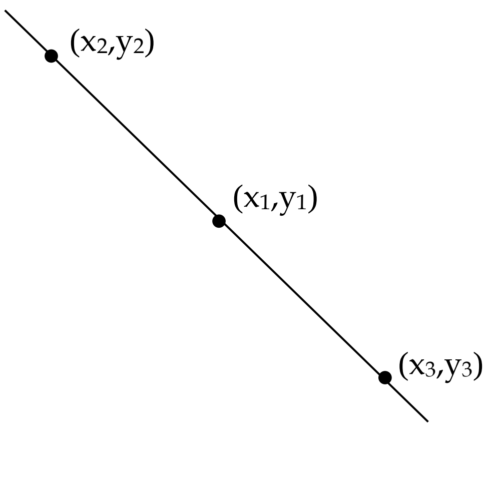
نأخذ (x_2,y_2) وَ (x_3,y_3) نقطتين في جوار (x_1,y_1)

في جهتين مختلفتين من النقطة (x_1,y_1).

لذلك فإنّ $f(x_2,y_2)=12y_2-16$ وَ $f(x_3,y_3)=12y_3-16$

فإذا كان $y_2>y_1>y_3$ فإن $f(x_2,y_2)>f(x_1,y_1)>f(x_3,y_3)$

لذلك (x_1,y_1) لا يمكن أن تكون نقطة نهاية قصوى محلية.



ملخص:

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k$$

الهيئة: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$

إذا كان $\Delta < 0$ وَ $a < 0$ للدالة قيمة عظمى مطلقة ونقطة النهاية هي $(x_0\ , y_0)$ حل الهيئة

$$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$

إذا كان $\Delta < 0$ وَ $a > 0$ للدالة قيمة صغرى مطلقة ونقطة النهاية هي $(x_0\ , y_0)$ حل الهيئة

$$\begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ bx + 2cy + e = 0 \end{cases}$$

إذا كان $\Delta > 0$ لا توجد للدالة قيمة صغرى مطلقة أو قيمة عظمى مطلقة.

إذا كان $\Delta = 0$ وَ $2ae - bd \neq 0$ فلا توجد للدالة قيمة صغرى مطلقة أو قيمة عظمى مطلقة.

إذا كان $\Delta = 0$ وَ $2ae - bd = 0$ فإذا كان $a < 0$ للدالة قيمة عظمى مطلقة في جميع نقاط المستقيم $2ax + by + d = 0$, والقيمة العظمى = $k - \frac{d^2}{4a}$.

وإذا كان $a > 0$ للدالة قيمة صغرى مطلقة في جميع نقاط المستقيم $2ax + by + d = 0$، والقيمة الصغرى = $k - \frac{d^2}{4a}$.

ب. الحالة الثانية عندما $a \neq 0$ وَ $b = 0$ (أو $c \neq 0$ و $b = 0$). في هذه الحالة فإنّ الدالة هي: $f(x,y) = ax^2 + cy^2 + dx + ey + k$. من السهل معالجة القضية في هذه الحالة بواسطة الإكمال لمربع عند كتابة الدالة كمجموع دالتين إحداها بالمتغير x والأخرى بالمتغير y. يسهل على القارئ استنتاج أن:

(1) عندما $a>0$ و $c>0$ يكون للدالة قيمة صغرى مطلقة في النقطة $\left(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c}\right)$.

(2) عندما $a<0$ و $c<0$ يكون للدالة قيمة عظمى مطلقة في النقطة $\left(-\frac{d}{2a},-\frac{e}{2c}\right)$.

(3) عندما $ac<0$ (أي أن a و c مختلفان بالإشارة) فلا توجد للدالة قيمة قصوى.

(4) عندما $b\neq 0$ و $a=0$ و $c=0$ لا توجد للدالة قيمة قصوى.

ببليوغرافية:

1. Callahan, J., James, (2010), *Advanced Calculus: A Geometric View*, Springer.

תקציר

במאמר זה אני מציג דרך פשוטה למציאת האקסטרימום של פונקציה ריבועית בשני משתנים. דרך זו הינה הכללה של דרך מציאת האקסטרימום של פונקציה ריבועית במשתנה אחד שבה התחלתי את המאמר. הדרך מסתמכת אך ורק על רעיון ההשלמה לריבוע , לכן היא דרך אלגברית טהורה, ולכן ניתן ללמד אותה לתלמידים מתקדמים בסוף חט״ב. בפתרון נגיע לנגזרות החלקיות לדיטירמננט ההיסיאן (ראה (1)) . במאמר יש טיפול במקרה שבו דיטירמננט ההיסיאן שווה 0, נגיע לתנאי הכרחי ומספיק לקביעת אם הנקודה החשודה היא נקודת אקסטרימום או לא במקרה זה.