

## ידע של מורים: מהם הגורמים המשפיעים עליו

וג'יה דאהר

עותמאן ג'אבר

אבתסאם עבד אלחאלק

### תקציר:

מחקר זה בוחן קשרים פנימיים בין סוגי ידע מורים וכן קשרים של ידע זה עם גורמים חיצוניים. באופן ספציפי, מחקר זה בוחן את הקשר בין מרכיבי הידע הבאים: ידע תוכן, ידע תוכן פדגוגי, וידע על לומדים של מתכשרים להוראה בהתמחות מתמטיקה לחטי"ב בקשר לפתרון משוואות השייכות לתוכנית הלימודים של חטי"ב. הוא גם בוחן את הקשר בין שני סוגי הידע הראשוניים ובין הניסיון הקודם של המתכשרים בפתרון משוואות או עמדתם ודעתם על המתמטיקה כמדע בעל ייצוגים שונים. מהממצאים עולה כי ישנה השפעה של ההיסטוריה של המשתתפים בפתרון משוואות על ידע התוכן הפדגוגי והידע על לומדים שלהם. כמו כן נמצאת השפעה של עמדתם כלפי המתמטיקה ופתרון משוואות במתמטיקה על ידע התוכן וידע התוכן הפדגוגי שלהם.

### הקדמה:

מחקר על ידע מורים דרוש כדי להבין יותר את נושא ההוראה היעילה (Lowery, 2002). Shulman (1987) זהה שבעה מרכיבים של ידע מורים: ידע תוכן, ידע פדגוגי כללי, ידע תוכן פדגוגי, ידע קוריקולארי, ידע על לומדים, ידע על סביבת הלמידה, וכן ידע של מטרות חינוכיות. Fennema ו-Franke (1992) כתבו סקירה רחבה של מחקר על ידע מורים ומצאו שמחקר זה טפל בידע מורים באופן מבודד. הם הצביעו על נדירות המחקרים שמטפלים במורכבות ידע מורים או על הקשר בין המתמטיקה שהם יודעים וזו שהם מלמדים. אחד המחקרים העוסק בהקשר זה הוא של Parker ו-Heywood (2000) שחקרו את הקשר בין ידע תוכן וידע תוכן פדגוגי של מורים בבית הספר היסודי כאשר למדו על כוחות בהקשר של ציפה ושקיעה. מחקרים בחינוך המתמטי מסוג זה קיימים אבל בדרך כלל הם בוחנים רק את הקשר בין ידע תוכן של מורים וידע תוכן פדגוגי של מורים (Kahan ועמיתיו, 2003; Godino ועמיתיו, 2005). מטרת מחקר זה היא גם לעסוק בקשרים אלה אבל לא רק בין שני קשרים אלה אלא גם את הקשר בין ידע תוכן פדגוגי לבין ידע על לומדים. במחקר זה אנו גם בוחנים קשרים שנראים בעינינו כחשובים, כאשר מתארים את ידע המורים, כמו הקשר בין שלושת מרכיבי הידע הנזכרים ובין הניסיון הקודם של המתכשרים בנושא התוכן הספציפי או בין שלושת מרכיבי הידע לעמדות ודעות המתכשרים כלפי המתמטיקה כמדע בעל ייצוגים שונים.

### שאלות המחקר :

1. מהו הקשר בין ידע תוכן ובין ידע תוכן פדגוגי של המתכשרים להוראה בקשר לפתרון משוואות מחט"ב?
2. מהו הקשר בין ידע תוכן פדגוגי של המתכשרים להוראה ובין ידע על לומדים בקשר לפתרון משוואות מחט"ב?
3. מהו הקשר בין ידע תוכן, ידע תוכן פדגוגי, וידע על לומדים של מתכשרים מצד אחד ובין הניסיון הקודם שלהם בפתרון בעיות מצד שני?
4. מהו הקשר בין ידע תוכן וידע תוכן פדגוגי של מתכשרים ובין תכונות פרסונאליות כמו גישה למתמטיקה כמדע בעל ייצוגים שונים?

### מסגרת המחקר :

#### המשתתפים :

המשתתפים הם עשרים מתכשרים להוראה, בשנת לימודים הרביעית, בהתמחות מתמטיקה.

#### השאלונים : המשתתפים מלאו שלושה שאלונים :

(1) שאלון שהכיל 7 משוואות שאפשר לפגוש בחטיבת הביניים (2) שאלון על עמדות המשתתפים כלפי המתמטיקה כמדע בעל ייצוגים שונים : אלגברי, גרפי, מספרי, לוגי, ייצוג בטבלה ו- (3) שאלון על עמדות המשתתפים כלפי לומד המתמטיקה.

#### תהליך :

דרשנו מהמשתתפים לפתור שבע משוואות שאפשר לפגוש בכיתות ח' ו- ט' בדרך שהם רוצים ואחר כך להציע באיזה דרכים היו משתמשים כדי ללמד את המשוואות לתלמידי חט"ב. אחר כך דנו בכיתה בדרכים השונות שאפשר לפתור באמצעותן כל אחת מהמשוואות הנתונות, כאשר ציינו במיוחד את הדרכים הבאות : ניחוש, דרך אלגברית, דרך גרפית, דרך טבלת ערכים, ובצורה לוגית. דרשנו מהמתכשרים לדרג את השיטות מצד אחד לפי העדפותיהם לשיטות אלה כדרך פתרון שהם ישתמשו בה ומצד שני לפי העדפותיהם כדרך שיסבירו בה את דרך פתרון המשוואות לתלמידיהם, ושאלנו אותם אם יש משוואות שעדיף לפתור אותן בדרך מסוימת. כמו כן המתכשרים נשאלו אודות שיטות הפתרון שהכירו בעבר, באיזו שיטות השתמשו ; עם מתן דוגמאות על שימוש זה, ובאיזה שיטות הם משתמשים כיום. לבסוף דרשנו מהם למלא שני שאלונים : שאלון הבוחן את עמדתם ודעתם על המתמטיקה כמדע של ייצוגים שונים ושאלון הבוחן את עמדתם כלפי לומד המתמטיקה.

### שיטות המחקר:

#### שיטה איכותנית:

השיטה האיכותית מערבת אפיון כל משתתף במחקר בערכי משתני המחקר וניסיון לאבחן קשרים התחלתיים בין המשתנים עבור כל משתתף ומציאת תופעות כלליות עבור כל המשתתפים, דבר הדומה בצורה מסוימת לשיטה הכמותית אבל בלי קידוד ושכיחויות.

#### שיטה כמותית:

השיטה הכמותית נעשתה באמצעות תוכנת SPSS ומערבת סטטיסטיקה תיאורית ומתאמים בין משתני המחקר.

### קידוד הנתונים:

#### קידוד רמת ידע התוכן של המתכשרים:

הסתכלנו על שלושה מרכיבים של ידע תוכן: ידע תוכן טכני, ידע תוכן קונספטואלי, וסוג הייצוג המוצע לפתרון המשוואה. לגבי כל משוואה חלקנו את המשתתפים לשלוש קבוצות בהתאם לרמת ידיעתם לדרך פתרון המשוואה, אם זה לגבי ידיעתם לפתרון הטכני או למשמעות הקונספטואלית של הפתרון. חילקנו אותם, לגבי ידיעתם הטכנית, לקבוצות: (1) לא יודעים את טכניקת הפתרון, (2) יודעים חלק מהטכניקה אבל לא את כולה ו- (3) יודעים את כל הטכניקה של הפתרון. לגבי ידיעתם למשמעות הקונספטואלית של הפתרון חילקנו אותם בדרך דומה: (1) לא מכירים את המשמעות הקונספטואלית של הפתרון, (2) מכירים את המשמעות הקונספטואלית של הפתרון אבל לא לעומק, ו- (3) מכירים לעומק את המשמעות הקונספטואלית של הפתרון. נתן דוגמאות על חישוב זה: נשתמש בפתרון המשוואה הבאה כדוגמה:

$$(x^2 - 2)^2 = -4$$

רמת ידע התוכן הטכני: מי שלא ידע לפתור את המשוואה קודד בקטגוריה (1) למעלה, מי שידע למשל להתחיל, כמו לפתוח את הסוגריים ולפשט אחר כך אבל לא ידע את הטכניקה איך לפתור את המשוואה ממעלה 4 שנוצרה קודד בקטגוריה (2) למעלה, ומי שידע להמשיך עד הסוף, למשל להפוך את המשוואה ממעלה 4 למעלה 2 ולפתור אותה לפי נוסחת פתרון משוואה ממעלה שנייה ולהסיק מזה את פתרון המשוואה המקורית, קודד בקטגוריה 3 למעלה.

רמת הידע הקונספטואלי: מי שידע שמשמעות משוואה זו היא שכמות אלגברית שווה למספר שלילי, מה שלא יתכן בשדה הממשיים, לכן אין פתרון בשדה זה, קודד בקטגוריה (3) למעלה. מי שידע משמעות זו בצורה כללית אבל טעה במשמעות כלשהי

השייכת לתופעה מתמטית זו, למשל ציין שהריבוע של משוואה אינו יכול להיות שלילי (במקום לציין ריבוע של כמות), אז קודד בקטגוריה (2) למעלה. מי שלא ידע לפתור את המשוואה אז הסתכלנו עליו כלא קלט את המשמעויות של המשוואה וקודד בקטגוריה (1) למעלה.

חישבנו את ידע התוכן הטכני ואת ידע התוכן הקונספטואלי בצורה הבאה: עבור כל משוואה נתנו ציון 1 לזה שאינו יודע, נתנו ציון 2 ליודע חלק אבל לא את הכול, ונתנו ציון 3 ליודע את הכול. לכן הציון המינימלי שיכל משתתף לקבל עבור ידע התוכן הטכני או ידע התוכן הקונספטואלי הוא  $7=1 \times 7$ , והציון המקסימלי שיכל לקבל הוא  $49=7 \times 7$ . הגדרנו את המשתנה "ידע תוכן בסיסי" כמורכב מידע התוכן הטכני ומידע התוכן הקונספטואלי. חישבנו את ידע התוכן הבסיסי כסכום ידע התוכן הטכני עם ידע התוכן הקונספטואלי. לכן הציון המינימלי שיכל משתתף לקבל עבור ידע התוכן הבסיסי הוא  $14=7+7$ , והציון המקסימלי שיכל לקבל הוא  $98=49+49$ .

#### קידוד רמת ידע התוכן הפדגוגי של המתכשרים בנושא המשוואות:

כדי לבחון את ידע התוכן הפדגוגי של נושא המשוואות הסתכלנו על ארבעה אספקטים: (1) סוג הפתרון מבחינת הייצוג שלו: אלגברי, גרפי, לוגי, דרך הצבה, דרך טבלאות, או דרך ניחוש. (2) מספר הייצוגים שהמשתתף הציע כדי ללמד את נושא פתרון משוואות (3) פירוט צעדי הפתרון כאשר מלמדים איך פותרים את המשוואה, ו- (4) הצדקת הטענות כאשר מלמדים איך פותרים את המשוואה.

חישבנו את רמת פירוט צעדי הפתרון ורמת הצדקת הטענות שהן חלק מהפתרון בצורה הבאה: נתנו ציון 1 למי שלא פרט את צעדי הפתרון או פרט בצורה מועטה מאוד, נתנו ציון 2 למי שפרט כמה צעדים אבל לא כולם, ונתנו ציון 3 למי שפרט את רוב או כל צעדי הפתרון. באותו אופן: נתנו ציון 1 למי שלא הצדיק אף טענה, נתנו ציון 2 למי שהצדיק כמה טענות אבל לא כולם, ונתנו ציון 3 למי שהצדיק את כל הטענות אשר בפתרון. לכן הציון המינימלי שיכל משתתף לקבל עבור פירוט צעדי הפתרון או הצדקת הטענות השייכות לפתרון הוא  $7=1 \times 7$ , והציון המקסימלי שיכל לקבל הוא  $49=7 \times 7$ .

הגדרנו את המשתנה "שיטת ההוראה" כמורכב מרמת פירוט צעדי הפתרון ורמת ההצדקה. חישבנו את ערך שיטת ההוראה כסכום רמת פירוט צעדי הפתרון עם רמת ההצדקה. לכן הציון המינימלי שיכל משתתף לקבל עבור שיטת ההוראה הוא  $14=7+7$ , והציון המקסימלי שיכל לקבל הוא  $98=49+49$ .

קידוד הדעה או העמדה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי :

הדעה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי חושבה כסכום תשובות המשתתף על חלקי השאלון על המתמטיקה כמדע ייצוגי, כאשר ציון 1 ניתן על לא מסכים בכלל, וציון 5 ניתן על מסכים מאוד. השאלון הכיל 13 פריטים, לכן הציון המינימלי שיכל משתתף לקבל עבור הדעה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי הוא  $13=13 \times 1$ , והציון המקסימלי שיכל לקבל הוא  $65=13 \times 5$ .

קידוד היסטורית הפתרון :

עבור כל אחד מהייצוגים: אלגברי, גרפי, מספרי, ולוגי, המשתתף מתי הכיר את פתרון משוואות מתמטיות לפיו. ההיסטוריה שלו בשימוש בייצוג מסוים ניתנה את הערך 1 אם הוא לא הכיר את פתרון המשוואות על ידי שימוש בו, היא ניתנה את הערך 2 אם הוא הכיר את פתרון המשוואות על ידי שימוש בו במכללה, היא ניתנה את הערך 3 אם הוא הכיר את פתרון המשוואות על ידי שימוש בו בתיכון, והיא ניתנה את הערך 4 אם הוא הכיר את פתרון המשוואות על ידי שימוש בו בחטי"ב או ביסודי. אחר כך הוגדר המשתנה "היסטורית שימוש בייצוגים" ע"י חיבור ההיסטוריות השונות שלו בשימוש בייצוגים השונים לפתרון משוואות. לכן הציון המינימלי שיכל משתתף לקבל עבור היסטורית שימוש בייצוגים הוא  $4=4 \times 1$ , והציון המקסימלי שיכל לקבל הוא  $16=4 \times 4$ .

**ממצאים :**

ידע תוכן של המשתתפים

הסוג הייצוגי של הפתרון :

ששה משבע המשוואות היה אפשר לפתור בדרך אלגברית. המשוואה השביעית היה אפשר לפתור בשילוב של דרך אלגברית וניחוש. עוד, שש משבע המשוואות היה אפשר לפתור בדרך לוגית, כלומר בשימוש בהצדקות מתמטיות, עם או בלי מניפולציות אלגבריות. הפתרון בדרך לוגית של שלוש מתוך שש המשוואות האלה יקצר את דרך הפתרון. הפתרון בדרך הלוגית יוסיף למשמעות המשוואה המתמטית בשני מובנים: (1) הבנת למה יש משוואות שיש להן פתרון אחד, משוואות שאין להן פתרון, ומשוואות שיש להן יותר מפתרון אחד, (2) הבנת תכונות אלגבריות כלליות כמו שריבוע של מספר ממשי לא יכול להיות שלילי. כל המשוואות היה אפשר לפתור בדרך גרפית, כאשר הפתרון הגרפי היה יותר קל מפתרונות אחרים באחת מהן, ובשאר המשוואות הפתרון הגרפי היה מוסיף משמעות והצדקה ויזואליות למה יש או אין פתרון למשוואה מסוימת.

טבלה 1 מתארת את הדרכים השונות לפתרון המשוואות שהמתכשרים נתבקשו לפתור אותן ואת אחוז המתכשרים שפתרו מס' מסוים של משוואות באותה דרך.  
**טבלה 1: אחוז המתכשרים שפתרו מס' מסוים של משוואות בדרך מסוימת (N=20)**

מספר משוואות	שיטת הפתרון	אלגברית	לוגית	גרפית	הצבה	ניחוש	מעורבת
0	-	20%	86.73%	20%	83.33%	56.66%	
1	10%	46.67%	6.67%	73.33%	16.67%	36.67%	
2	-	26.67%	6.67%	6.67%	-	6.67%	
3	16.67%	-	-	-	-	-	
4	26.67%	6.67%	-	-	-	-	
5	26.67%	-	-	-	-	-	
6	26.67%	-	-	-	-	-	
7	-	-	-	-	-	-	

מטבלה 1 רואים שרוב המשתתפים במחקר פתרו מארבע עד שש משוואות משבע המשוואות הנתונות בדרך אלגברית, ז"א השתמשו בצורה מועטת בשאר השיטות לפתרון משוואות. 43.34% מהמשתתפים השתמשו בשיטה מעורבת לפתרון אחת מהמשוואות או שתיים מהן.

**רמת ידע התוכן הטכני של הפתרון :**

טבלה 2 מתארת את רמות ידע התוכן הטכני של המשתתפים במחקר לגבי פתרון משוואות.

**טבלה 2: רמות ידע התוכן הטכני השונות בפתרון משוואות ואחוז המשתתפים בכל רמה (N=20)**

רמת ידע התוכן הטכני	אחוז המשתתפים באותה רמה
15	5%
16	5%
17	20%
18	15%
19	30%
20	15%
21	10%

רמת ידע התוכן הקונספטואלי של הפתרון :

טבלה 3 מתארת את רמות ידע התוכן הקונספטואלי של המשתתפים במחקר לגבי פתרון משוואות.

טבלה 3: רמות ידע התוכן הקונספטואלי השונות בפתרון משוואות ואחוז המשתתפים בכל רמה (N=20)

אחוז המשתתפים באותה רמה	רמת ידע התוכן הקונספטואלי
5%	12
5%	15
15%	16
30%	17
10%	18
15%	19
15%	20
5%	21

אפשר לראות משתי הטבלאות שהמשתתפים בקיאים יותר בטכניקה של פתרון מאשר במשמעות הקונספטואלית של פתרון משוואות, ושאיך הרבה משתתפים שהיו בקיאים ברמה גבוהה מאוד בפתרון כל המשוואות בשאלון.

רמת ידע התוכן הפדגוגי: המתכשרים מציעים איך מלמדים את פתרון המשוואות לתלמידים:

מספר הייצוגים ששמשו את המשתתפים להוראת נושא המשוואות :

טבלה 4 מתארת את מספר הייצוגים המתמטיים שצוינו ע"י המשתתפים כדרך ללמד את נושא המשוואות בחט"ב ואחוז המשתתפים שציינו כל ייצוג:

טבלה 4: מספר הייצוגים המתמטיים שצוינו ע"י המשתתפים כדרך ללמד את נושא המשוואות בחט"ב ואחוז המשתתפים שציינו כל ייצוג (N=20)

מספר הייצוגים	אחוז המשתתפים
שני ייצוגים	40%
שלושה ייצוגים	35%
ארבעה ייצוגים	25%

אפשר לראות מטבלה 4 שרוב המשתתפים השתמשו בשנים או שלושה ייצוגים כדי לפתור את כל המשוואות בשאלון.

**הסוג הייצוגי של הפתרון :**

מי שציין שני ייצוגים שמשמש בהם כדי ללמד פתרון משוואות אז הוא ציין את הייצוג האלגברי והמספרי. מי שציין שלושה ייצוגים אז ציין את הייצוג האלגברי, הייצוג המספרי והייצוג הגרפי או הלוגי במקום הגרפי. מי שציין ארבעה ייצוגים אז ציין את: האלגברי, המספרי, הלוגי והגרפי.

**פירוט צעדי הפיתרון :**

טבלה 5 מתארת את רמות השימוש בפירוט צעדי הפתרון, כאשר מלמדים איך פותרים את המשוואות.

**טבלה 5: רמות תיאור צעדי הפתרון של המשוואות**

אחוז המשתתפים	רמת תיאור צעדי הפתרון
5%	9
10%	10
10%	11
5%	12
10%	14
10%	15
20%	16
5%	17
5%	18
5%	19
15%	21

**הצדקת הטענות בפתרון המשוואות :**

טבלה 6 מתארת את רמות השימוש בהצדקת הטענות, כאשר מלמדים איך פותרים משוואות.

**טבלה 6 : רמות הצדקת הטענות אשר בפתרון המשוואות**

אחוז המשתתפים	רמת הצדקת הטענות בפתרונות
5%	9
10%	10
5%	12
10%	13
5%	15
5%	16
15%	17
25%	18
5%	19
10%	20
5%	21

רואים מטבלאות 5 ו-6 שיותר משתתפים, בבואם ללמד איך פותרים משוואות, הצדיקו טענותיהם בפתרון המשוואות ברמות גבוהות מאשר אלה שפרטו את צעדי פתרונותיהם ברמות גבוהות.

דעות המשתתפים על המתמטיקה כמדע ייצוגי:

טבלה 7 מתארת את דעות המשתתפים על המתמטיקה כמדע ייצוגי, כאשר הן נמדדות בסולם אורדינלי בין 13 ו-65.

**טבלה 7 : הייצוגיות של המתמטיקה ואחוז המשתתפים שזו דעתם**

אחוז המשתתפים	רמת הייצוגיות של המתמטיקה
10%	41
5%	43
5%	45
5%	46
10%	47
20%	48
5%	49
15%	51
5%	52
5%	54
5%	58
10%	60

אפשר לראות מטבלה 7 שאין משתתפים שחושבים שהמתמטיקה היא מדע שאין בו ייצוגים שונים.

דעות המשתתפים על לומד המתמטיקה :

טבלה 8 מתארת את דעות המשתתפים על לומד המתמטיקה, כאשר הן נמדדות בסולם אורדינלי בין 1 ו-5.

**טבלה 8: עמדות כלפי לומד המתמטיקה ואחוז מורים שמצדדים**

5	4	3	2	1	רמת הסכמה ההיגד
35%	55%	5%	5%	0%	תלמיד טוב צריך להיות לומד עצמאי
45%	50%	5%	0%	0%	תלמיד טוב צריך לדעות דרך פתרון שונות
35%	50%	15%	0%	0%	תלמיד טוב צריך לפתור את המשוואות באופן מסודר
30%	50%	15%	5%	0%	תלמיד טוב צריך להצדיק את טענותיו

אפשר לראות מטבלה 8 שרוב המתכשרים המשתתפים במחקר חושבים שתלמיד המתמטיקה הטוב צריך להיות עצמאי, צריך לדעת דרכי פתרון שונות, צריך לפתור את פתורו למשוואה בצורה מסודרת וצריך להצדיק את טענותיו.

הקשר בין ידע התוכן וידע התוכן הפדגוגי :

ממצאים איכותניים :

על ידי בחינת פתרונות המשתתפים למשוואות והדרך שבה הם מציגים את הנושא לתלמידיהם מצאנו את הממצאים הבאים :

- משתתפים בקיאים בידע תוכן טכני של פתרון משוואות הציעו דרכי הוראה לנושא המשוואות שהן בעלות יותר ייצוגים מתמטיים מאשר משתתפים שהם פחות בקיאים בידע הטכני של פתרון משוואות.
- למשל משתתפים בקיאים בידע תוכן טכני הציעו ללמד את פתרון המשוואה  $2x+3=2x-4$  על ידי הצדקה לוגית ובדרך אלגברית.
- משתתפים בקיאים בידע תוכן טכני הציעו ללמד כמה מהמשוואות בדרך לוגית.

ממצאים כמותיים :

טבלה 9 מתארת את ערכי מתאם ספירמן בין המרכיבים של ידע התוכן מצד אחד והמרכיבים של ידע התוכן הפדגוגי מצד שני.

**טבלה 9: קשרים בין מרכיבי ידע תוכן ומרכיבי ידע תוכן פדגוגי**

שיטת ההוראה	הצדקת הטענות	פירוט צעדי הפתרון	מספר הייצוגים המשומשים להוראת המקצוע	ידע תוכן פדגוגי / ידע תוכן
.309 .185 20	.256 .275 20	.307 .188 20	0.117 0.622 20	ידע קונספטואלי
.408 .074 20	.497(*) .026 20	.253 .281 20	.573(**) .008 20	ידע טכני
.403 .078 20	.413 .070 20	.324 .163 20	.361 .118 20	ידע תוכן בסיסי

\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.05.

\*\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.01.

נראה מטבלה 9 שמתאם ספירמן בין הידע הטכני מצד אחד ומספר הייצוגים המשומשים להוראת הנושא מצד שני הוא חזק, בזמן שמאתם ספירמן בין הידע הטכני מצד אחד ורמת הצדקת הטענות מצד שני הוא חזק במתינות.

טבלה 10 מתארת את ערכי מתאם ספירמן בין מרכיבי ידע התוכן ומספר המשוואות שהמשתתפים הציעו ללמד על ידי שימוש בדרך אלגברית, גרפית או לוגית :

**טבלה 10: קשרים בין מרכיבי ידע תוכן ומספר המשוואות שהמשתתפים הציעו ללמד בייצוג אלגברי, גרפי ולוגי**

הוצע ללמד בדרך לוגית	הוצע ללמד בדרך גרפית	הוצע ללמד בדרך אלגברית	מספר המשוואות ש- ידע תוכן
.152	.423	-.136	ידע קונספטואלי
.523	.063	.568	
20	20	20	
.506(*)	.575(**)	-.537(*)	ידע טכני
.023	.008	.015	
20	20	20	
.365	.558(*)	-.351	ידע תוכן בסיסי
.114	.011	.129	
20	20	20	

\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.05.

\*\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.01.

אפשר לראות מטבלה 10 שקיימים מתאמי ספירמן חזקים באופן מובהק בין הידע הטכני של המשתתפים ובין מספרי המשוואות שהוצע ללמד אותן בכל ייצוג מהשלושה. צריך להעיר שמתאם ספירמן בין הידע הטכני ומספר המשוואות שהוצע ללמד אלגברית הוא שלילי. קיים גם מתאם ספירמן חזק במתינות, באופן כמעט מובהק ברמה 0.05 בין הידע הקונספטואלי ומספר המשוואות שהוצע ללמד אותן גרפית.

הקשר בין ידע תוכן וההיסטוריה של המתכשר בפתרון משוואות :

טבלה 11 מתארת את מתאמי ספירמן בין מרכיבי ידע תוכן ובין ההיסטוריה של המשתתפים במחקר בפתרון משוואות – היסטורית השימוש בייצוגים :

**טבלה 11: הקשרים בין מרכיבי ידע תוכן וההיסטוריה של המתכשרים בפתרון משוואות**

היסטורית השימוש בייצוגים	ידע תוכן
.114 .633 20	ידע קונספטואלי
.488(*) .029 20	ידע טכני
.313 .179 20	ידע תוכן בסיסי

\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.05.

אפשר לראות מטבלה 11 שקיים מתאם ספירמן חזק במתינות ובאופן מובהק בין הידע הטכני של המשתתפים ובין היסטורית השימוש בייצוגים.

הקשר בין ידע תוכן פדגוגי ובין דעת המשתתפים על המתמטיקה כמדע ייצוגי או דעותיהם על הלומדים כלומדים עצמאיים או היסטורית השימוש בייצוגים :

*ממצאים איכותניים :*

בהיסטוריה של המתכשר מה שהשפיע על שימוש בדרך פתרון המשתמשת בייצוג מסוים אינה תקופת שימוש בדרך זו אלא סוגי המשוואות שפתר אותן על ידי שימוש בדרך זו.

למשל מתכשרים שפתרו בדרך לוגית סוגי משוואות מהצורה  $(x+2)^2=-4$  אבל לא פתרו בדרך לוגית משוואות מהצורה  $2x^4+3x^2+5=-6$  אז כאשר הם יבואו לפתור משוואות מהסוג האחרון הם לא ישתמשו בדרך לוגית אלא אלגברית.

ממצאים כמותיים :

טבלה 12 מתארת את ערכי מתאם ספירמן בין המרכיבים של ידע תוכן פדגוגי מצד אחד ובין דעותיהם על המתמטיקה כמדע ייצוגי או דעותיהם על הסטודנטים, או ההיסטוריה שלהם בפתרון בעיות מצד שני.

**טבלה 12: קשרים בין מרכיבי ידע תוכן פדגוגי ובין עמדות כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי וכלפי הלומד**

שיטת ההוראה	הצדקת הטענות	פירוט צעדי הפתרון	מספר הייצוגים המשומשים להוראת המקצוע	ידע תוכן פדגוגי מרכיבים שאינם חלק מידע התוכן
-0.440(*) .052 20	-0.224 .342 20	-0.570(**) .009 20	-0.269 .251 20	העמדה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי
-0.298 .202 20	-0.225 .340 20	-0.317 .174 20	-0.240 .309 20	העמדה כלפי הסטודנט כלומד עצמאי
.348 .132 20	.402 .079 20	.238 .312 20	-0.410 .073 20	העמדה כלפי הסטודנט כלומד היודע לפתור בדכים שונות
.019 .938 20	-0.017 .944 20	.049 .837 20	.000 1.000 20	העמדה כלפי הסטודנט כלומד המצדיק את טענותיו
.155 .513 20	.215 .363 20	.072 .762 20	-0.264 .260 20	העמדה כלפי הסטודנט כלומד המארגן את פתרונותיו
-0.049 .838 20	.015 .949 20	-0.010 .966 20	.777(**) .000 20	היסטורית השימוש בייצוגים לפתרון משוואות

\* המתאם הוא מובהק קרוב מאוד לרמת 0.05.

\*\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.01.

קיים מתאם ספירמן שלילי חזק בין העמדה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי ובין פירוט צעדי הפתרון, כמו כן קיים מתאם שלילי חזק במתינות בין עמדה זו ובין שיטת ההוראה של המשתתף, כאשר מתאם זה הוא מובהק ברמה קרובה מאוד ל- 0.05. אפשר גם לראות מטבלה 12 שקיים מתאם ספירמן חזק ברמת מובהקות של 0.01 בין

היסטוריה המתכשר בשימוש בייצוגים לפתרון משוואות ובין מספר הייצוגים שהשתמש בהם כדי ללמד פתרון המשוואות בשאלון.

הקשר בין ידע תוכן ובין דעת המשתתפים על המתמטיקה כמדע ייצוגי :

טבלה 13 מתארת את ערכי מתאם ספירמן בין מרכיבי ידע התוכן של המשתתפים במחקר ובין דעותיהם על המתמטיקה כמדע של ייצוגים שונים.

**טבלה 13 הקשרים בין מרכיבי ידע תוכן ודעות המתכשרים על המתמטיקה כמדע ייצוגי**

המתמטיקה כמדע ייצוגי	ידע תוכן
-.483(*) .031 20	ידע קונספטואלי
-.453(*) .045 20	ידע טכני
-.527(*) .017 20	ידע תוכן בסיסי

\* המתאם הוא מובהק ברמת 0.05.

מטבלה 13 רואים שקיימים מתאמים חזקים במתינות, ומובהקים ברמה של 0.05, בין שני מרכיבי ידע התוכן וידע התוכן הבסיסי ובין הדעה של המתכשר על המתמטיקה כמדע ייצוגי.

**דיון:**

במחקר זה רצינו לדעת מה משפיע על ידע התוכן הפדגוגי של מתכשרים להוראה בהתמחות מתמטיקה. האם אלו מרכיבים של ידע התוכן אשר רכשו? כאשר במחקר זה ידע התוכן של פתרון משוואות הוא בעל המרכיבים: ידע תוכן טכני, ידע תוכן קונספטואלי, והסוג הייצוגי של שיטת פתרון המשוואות, בזמן שידע התוכן הפדגוגי בפתרון משוואות הוא בעל המרכיבים הבאים: מספר הייצוגים המשומשים להוראת

פתרון משוואות, סוג הייצוגים המשומשים להוראת פתרון משוואות, פירוט צעדי הפתרון, והצדקת הטענות כאשר מלמדים פתרון משוואות.

שאלנו האם גורמים אחרים מלבד ידע התוכן משפיעים על ידע התוכן הפדגוגי של המשתתפים במחקר בפתרון משוואות, כמו דעותיהם על המתמטיקה כמדע ייצוגי, דעותיהם על הלומדים, וההיסטוריה שלהם בשימוש בייצוגים שונים לפתרון משוואות.

השתמשנו בניתוח איכותני וכמותי לנתונים שאספנו דרך פתרון משוואות ושאלונים כדי להשיב על שאלות המחקר. בקשר לשאלת המחקר הראשונה מצאנו שלושה ממצאים עיקריים: (1) ידע תוכן טכני משפיע בצורה מובהקת וחזקה על המרכיבים הבאים של ידע התוכן הפדגוגי בנושא פתרון משוואות: מספר הייצוגים המוצעים להוראת נושא המשוואות והצדקת הטענות שהן חלק מפתרון המשוואות. (2) ידע התוכן הבסיסי משפיע בצורה חזקה במתינות וברמת מובהקות הקרובה ל-0.05 על השימוש בהצדקה ועל שיטת ההוראה. (3) משתתפים יותר בקיאים בידע תוכן טכני הציעו ללמד יותר משוואות בדרך לוגית ובדרך גרפית ופחות משוואות בדרך האלברית.

הממצא הראשון מראה שיש השפעה חשובה לבקיאות בידע התוכן הטכני על ידע התוכן הפדגוגי. הסבר אפשרי להשפעה חזקה זו הוא שבקיאות המורה בידע התוכן הטכני נותנת לו בטחון עצמי, מה שגורם למתכשר לחשוב על אספקטים של הוראת הנושא המתמטי כמו דרכי הפתרון השונים מבחינה ייצוגית והצדקת הטענות שבהם הוא משתמש בפתרון המשוואות, ז"א בקיאות בידע התוכן הטכני היא תנאי יסודי וראשון לכך שהמורה יחשוב על היבטי הוראתו לנושא המתמטי. לפני שמורה המתמטיקה יהיה בקיא בידע התוכן הטכני הוא יהיה עסוק בהתגברות על חוסר ידע זה בלי תשומת לב מספיקה לדרך שבה מלמדים את התוכן המתמטי.

הממצא השני קשור לידע התוכן הבסיסי, כאשר הוא משפיע בצורה חזקה במתינות על שיטת ההוראה המורכבת מפירוט צעדי הפתרון וההצדקה של הטענות שמורכב מהם הפתרון. ממצא זה יכול להיות מושפע מהקשר החזק של ידע התוכן הטכני על השימוש בהצדקות בפתרון משוואות. בכל מקרה ממצא זה מחזק את הטענות שטענו למעלה, לגבי חיוניות השליטה בידע התוכן הטכני, כך שאפשר להכליל ולאמור שבקיאות בידע התוכן היסודי בנושא מתמטי מסוים הוא תנאי מוקדם לתשומת הלב של המתכשר בפרט ושל המורה בכלל לאספקטים של הוראת נושא זה: כאשר המתכשר והמורה בפועל בקיאים יותר בידע התוכן הם יהיו מעורבים יותר באספקטים של הכנת חומר זה לכיתה.

אפשר לפרש את הממצא השלישי בקשר לשאלת המחקר הראשונה באותה צורה: בקיאות בידע תוכן טכני, ובעיקר אלגברי, נותנת למתכשר בטיחות עצמית ותחושת

נחות שגורמת לו לחשוב על דרכי פתרון אחרות המשתמשות בייצוגים מתמטיים מלבד הייצוג האלגברי, כלומר לחשוב על צורות ייצוג שונות שבאמצעותן יהיה קל לתלמידי להבין את המשמעות הקונספטואלית של פתרון המשוואות, או שתהווה דרך קצרה יותר לפתרון המשוואות. למשל הדרך הלוגית לפתרון משוואות, כאשר היא אפשרית, נותנת משמעות קונספטואלית נוספת לפתרון משוואות ומקצרת את דרך הפתרון, בזמן שהדרך הגרפית לפתרון משוואות נותנת משמעות קונספטואלית נוספת לפתרון, אבל לא תמיד מקצרת את הפתרון.

שאלת המחקר השנייה הייתה על הקשר בין ידע התוכן הפדגוגי של המתכשרים להוראה בקשר לפתרון משוואות ובין הידע על לומדים. לא נמצאו מתאמים מובהקים לקשר זה ברמת מובהקות של 0.05 או פחות. אנו ציפינו שיהיה קשר בין דעות המשתתפים על הלומדים ובין ידע התוכן הפדגוגי שלהם, למשל משתתפים שחושבים שהמתכשר צריך לדעת שיטות שונות של פתרון ישתמשו בהוראתם, גם בנושא פתרון משוואות, בייצוגים מתמטיים שונים, אבל זה לא קרה במחקר זה. להיפך, נמצא מתאם ספירמן שלילי ובינוני ברמת מובהקות בין 0.05 ל- 0.08 בין העמדה כלפי התלמיד כלומד היודע לפתור בדרכים שונות ובין מספר הייצוגים המשומשים להוראת הנושא. זה מראה שמה שהשפיע על עמדת המשתתפים כלפי לומד המתמטיקה הוא תיאוריות חדישות הנפוצות בחינוך המתמטי כיום, למשל העקרונות והסטנדרטים של ה-NCTM, ולא חשיבה פנימית של המשתתף על הצורך בשימוש בייצוגים שונים במתמטיקה.

שאלת המחקר השלישית הייתה על הקשר בין ידע התוכן של מתכשרים, ידע התוכן הפדגוגי שלהם, וידע על לומדים מצד אחד ובין הניסיון הקודם שלהם בפתרון בעיות מצד שני.

הממצאים העיקריים לגבי שאלה זו הם: (1) קיים מתאם ספירמן חיובי חזק ברמת מובהקות של 0.01 בין ההיסטוריה של המתכשר בשימוש בייצוגים שונים לפתרון משוואות ובין מספר הייצוגים שהשתמש בהם לשם הצגת נושא פתרון המשוואות. (2) בהיסטוריה של המתכשר מה שהשפיע על שימוש בדרך פתרון המשתמשת בייצוג מסוים אינה תקופת שימוש בדרך זו בלבד אלא בעיקר סוגי המשוואות שפתר אותן על ידי שימוש בדרך זו. (3) קיים מתאם ספירמן חיובי חזק במתינות ובאופן מובהק בין רמת הידע הטכני של המשתתפים ובין ההיסטוריה שלהם בשימוש בייצוגים לשם פתרון משוואות.

אפשר להסביר את הממצא השלישי בקשר לשאלה זו בכך שבמשך התקופה שעוברת מאז הכרה המתכשרים לשיטות הפתרון השונות המשתמשות בייצוגים מתמטיים

שונים הם מתמידים להשתמש בשיטות אלה וכך מתבסס יותר ידע התוכן שלהם בנושא המשוואות. מכאן אפשר להסביר את הממצא הראשון כי ככל שמתבסס ידע התוכן של המתכשר, כמו שטענו קודם, הם מתפנים לאספקטים של הוראת הנושא כמו הכרת הייצוגים שאפשר לנצל כדי שהתלמידים יבינו את שלבי פתרון משוואות ולמה כל הטענות שמשמשות את הפתרון נכונות.

אפשר להסביר את הממצא השני בקשר לשאלה השנייה בבעייתיות של העברת ידע מסוג מסוים של משוואות לסוג אחר. Newell (2005) מצביע על קיום ספרות מחקרית שמכירה בבעייתיות של מעבר הידע ו-Szulanski (1996) מתאר את הידע כדביק. זה מראה שלא מספיק להציע דרך פתרון כלשהי לתלמידים אלא צריך להראות או לדון באיך פותרים באותה דרך מגוון של משוואות ולא סוג אחד בלבד. אם התלמידים נחשפים רק לסוג אחד של משוואות שאפשר לפתור אותן בדרך לוגית למשל, ולא דנים על סוגי משוואות אחרים שאפשר לפתור בדרך לוגית, אז רוב התלמידים לא יישמו אותה דרך לוגית אלא רק לאותו סוג שפתרו משוואות ממנו לפי אותה דרך.

שאלת המחקר הרביעית הייתה על הקשר בין ידע תוכן וידע תוכן פדגוגי של מתכשרים מצד אחד ובין הגישה למתמטיקה כמדע בעל ייצוגים שונים מצד שני.

הממצאים העיקריים לגבי שאלה זו הם: (1) קיימים מתאמים שליליים חזקים במתינות, ומובהקים ברמה של 0.05, בין ידע התוכן הטכני, ידע התוכן הקונספטואלי וידע התוכן הבסיסי ובין הדעה של המתכשר על המתמטיקה כמדע ייצוגי. (2) קיים מתאם ספירמן שלילי חזק בין העמדה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי ובין פירוט צעדי הפתרון (3) קיים מתאם ספירמן שלילי חזק במתינות בין העמדה כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי ובין שיטת ההוראה של המשתתף, כאשר מתאם זה הוא מובהק ברמה קרובה מאוד ל-0.05.

אפשר להסביר את הממצא הראשון בקשר לשאלת המחקר הרביעית בכך שכאשר ידע התוכן הטכני או הקונספטואלי של הלומד מבוסס וחזק, מבחינת השימוש בייצוג מתמטי אחד, למשל האלגברי, אז הוא לא ימצא צורך בשימוש בייצוגים מתמטיים אחרים כדי לפתור משוואות מתמטיות למשל, ואז עמדתו כלפי הצורך בייצוגים המתמטיים לא תהיה חיובית.

אפשר להסביר את הממצא השני בקשר לשאלת המחקר הרביעית בכך שהעמדה של הלומד כלפי המתמטיקה כמדע ייצוגי היא עמדה תיאורטית יותר מאשר מעשית, וזה השתקף בממצא שהמתכשרים המשתתפים במחקר לא נתנו דוגמאות נכונות על השימוש בייצוגים השונים, מלבד האלגברי, לפתרון משוואות. צפוי שעמדת התיאורטית הזו תגרום להם לרצות להתעסק בפרטים על עם ייצוגים מתמטיים כחלק מידע

התוכן שלהם ולא מידע התוכן הפדגוגי. התעסקות זו בידע התוכן תקטין, כפי שהסברנו קודם מהתעסקותם בידע התוכן הפדגוגי, ובכלל זה פירוט צעדי הפתרון.

את הממצא השלישי של שאלת המחקר הרביעית אפשר להסביר באותה דרך כמו הממצא השני.

מסקנות:

- ראינו שיש השפעה חשובה לבקיאות בידע התוכן הטכני על ידע התוכן הפדגוגי. חשיבות זו מצביעה על כך שצריך להכין את המתכשר בידע התוכן הטכני לא פחות מהכנתו בידע התוכן הקונספטואלי. הכרה לעומק של ידע התוכן הטכני מאפשרת למתכשר להוראה ולמורה להפנות את תשומת לבם לידע התוכן הפדגוגי, ז"א לדרכים האופטימליות להוראת נושא התוכן. מצד שני, ביסוס ידע התוכן הטכני, גם בייצוג אחד כמו האלגברי, יהווה בסיס למעבר לייצוגים אחרים בלמידת ואחר כך בהוראת הנושא.
- ידע התוכן הפדגוגי של מורה המתמטיקה צריך להכיל סוגים שונים של אובייקטים מתמטיים שאפשר ללמוד וללמד בצורה כלשהי, למשל לא מספיק שהמורה ידע שאפשר לפתור משוואות ריבועיות בדרך גרפית, אלא גם הוא צריך להיחשף לשאר סוגי המשוואות שאפשר לפתור בדרך זו.
- צריך לטפח את העבודה עם ייצוגים שונים של אובייקטים ונושאים מתמטיים כי עבודה זו מחזקת את ידע התוכן שלהם במרכיביו, מה שמהווה בסיס לעבודה על אספקטי הוראת נושאים אלה. עבודה עם ייצוגים שונים כוללת גם עבודה עם דרכי הצדקה שונות. זוהי סיבה נוספת לחשיבות טיפוח העבודה עם ייצוגים מתמטיים שונים.

המלצות:

במחקר זה חקרנו את הגורמים שמשפיעים על ידע התוכן הפדגוגי של מתכשרים להוראה בהתמחות מתמטיקה. אוכלוסיית המחקר הייתה 20 מתכשרים להוראה בשנתם הרביעית. מחקר עתידי יכול לבדוק אם אותם ממצאים קיימים בכיתות נמוכות יותר של מתכשרים למתמטיקה ובאוכלוסיית המורים בפועל. מספר המשתתפים במחקר אינו גדול ומחקר עתידי יכול לבדוק אם אותם קשרים שמצאנו בין משתני מחקר זה נמצאים במדגמים יותר גדולים.

## References:

1. Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In Grouws, D. A (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan Publishing Company.
2. Godino J. D., Roa, R., Ruiz, F., and Pareja, J. L. (2005). Mathematical And Pedagogical Content Knowledge For Prospective Elementary School Teachers: The "Edumat-Maestros" Project. The Fifteenth ICMI Study Conference: The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics.  
[http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/GodinoJuan\\_ICMI15\\_prop.doc](http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/GodinoJuan_ICMI15_prop.doc).
3. Huckstep, P., Rowland, T., Thwaites, A. (2002). Primary teachers' mathematics content knowledge: what does it look like in the classroom? *BERA Conference*, Exeter.  
<http://www.leeds.ac.uk/educol/documents/00002534.htm>.
4. Kahan, J. A., Cooper, D., Bethea, K. A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 223-252.
5. Lowery, N. V. (2002). Construction of Teacher Knowledge in Context: Preparing Elementary Teachers to Teach Mathematics and Science. *School Science and Mathematics*, 102(2), 68-83.
6. Newell, S. (2005). Knowledge Transfer and Learning: Problems of Knowledge Transfer Associated with trying to Short-Circuit the Learning Cycle. *Journal of Information Systems and Technology Management*; 2(3), 275-290.

7. Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
8. Parker, J., Heywood, D. (2000). Exploring the relationship between subject knowledge and pedagogic content knowledge in primary teachers' learning about forces. *International Journal of Science Education*, 22(1), 89 – 111.
9. Szulanski, G. (1996). Exploring internal stickiness: Impediments to the transfer of best practice within the firm. *Strategic Management Journal*, 17, 27-43.