قضايا في القوى

علي عثمان

ملخّص:

يصادف الكثير منا موضوع القوى في المراحل الإعدادية والثانوية, ولا شك أن قوانين القوى في الضرب والقسمة هي أول ما يتبادر إلى أذهاننا حين نسمع بموضوع القوى , وقد يذهب البعض بعيداً معتقدا أن موضوع القوى لا يقتصر إلا على بضع قوانين نطبقها في مواضع معينة مثل تبسيط صور العدد أو حل معادلات أو قضايا رياضية وبذلك يطوى سجل موضوع القوى . إلا أنّ الأمر ليس كذلك تماما , فموضوع القوى في الواقع كغيره من المواضيع الكثيرة الأخرى في الرياضيات– فيه تساؤلات وجوانب بحث سنستعرض إحداها في هذا المقال.

سنبحث في هذا المقال صفة التبادلية في القوى , وبلغة الرموز سنبحث العلاقة بين التعبيرين : a^b و b^a وسنكشف عن الشروط التي تحقق المساواة أو التباين بين التعبيرين أعلاه.

نفتتح هذا المقال بإيجاد كافة الأزواج (a,b) للأعداد الطبيعية a و b حيث $b < a$ و $a > b$ و $a^b = b^a$.

كما هو معلوم فإنّ $2^4 = 4^2$. أي أن زوج الأعداد $(4,2)$ يحقق الشروط أعلاه .

هل هناك أزواج أخرى من الأعداد تحقق الشروط أعلاه؟

بلغة الرموز الرياضية في علم المجموعات علينا إيجاد عناصر المجموعة التالية :

$$A = \left\{ (a,b):\quad a > b \text{ و } a^b = b^a \text{ و } a,b \in N \right\}$$

نفرض أنّ $a^b = b^a$ و $a > b > 1$. لذلك فإنّ كل عامل أولي ل a هو عامل أولي ل b .

نفرض أنّ التمثيل الأولي ل a هو $a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots . p_j^{e_j}$. لذلك توجد أعداد طبيعية $t_1, t_2, \ldots, t_j$ بحيث أنّ $b = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \ldots . p_j^{t_j}$.

لذلك $a^b = b^a \iff p_1^{be_1} p_2^{be_2} \ldots . p_j^{be_j} = p_1^{at_1} p_2^{at_2} \ldots . p_j^{at_j} \iff$ لكل $1 \le i \le j$ يتحقق $e_i b = a t_i \iff$ لكل $1 \le i \le j$ $\dfrac{e_i}{t_i} = \dfrac{a}{b} > 1 \iff$ $e_i > t_i$ لكل $1 \le i \le j$.

لذلك $\frac{a}{b} = p_1^{e_1-t_1} p_2^{e_2-t_2} ....p_j^{e_j-t_j}$

لاحظ أنّ $e_j - t_j$ هو عدد طبيعي لكل $1 \le i \le j$ ولذلك $\frac{a}{b}$ عدد طبيعي .

نرمز $\frac{a}{b} = m$ (m عدد طبيعي) . بما أنّ $a = mb$ فإنّ :

$a^b = b^a \Leftrightarrow a^b = b^{mb} \Leftrightarrow a^b = \left(b^m\right)^b \Leftrightarrow a = b^m$.

لذلك $mb = b^m$, ومن هنا ينتج أنّ $b^{m-1} = m$.

نهـدف الآن لإيجـاد الأعـداد الطبيعيـة m و b الاكـبر مـن 1 والـتي تحقـق المسـاواة : $b^{m-1} = m$.

1) نبدأ مع $b = 2$. عندئذ تنتج المعادلة $2^{m-1} = m$.

إذا كـان $m = 2$ فانــه يتحقــق $2^1 = 2$. وبــذلك نحصــل علــى الحــلّ $a = 4 , b = 2$ للمعادلة $a^b = b^a$ (حيث $4^2 = 2^4$) .

نبرهن بواسطة الاستقراء الرياضي ان لكل $m > 2$ يتحقق $2^{m-1} > m$.

عندما $m = 3$: $2^2 > 3$.

نفرض ان $2^{m-1} > m$ ونبرهن أنّ $2^m > m+1$. وفعلاً ،

$2^m = 2 \cdot 2^{m-1} > 2m = m + m > m + 1$.

2) نبرهن الآن أنّ لكل $m \ge 2$ ولكل $b > 2$ يتحقق $b^{m-1} > m$.

ليكن $b > 2$. عندما $m = 2$: $b^{2-1} > 2$ (تتحقق المتباينة) .

نفرض أنّ المتباينة صحيحة لقيم m حيث $m \ge 2$, ونبرهن صحة المتباينة ل $m+1$.

$b^{m+1-1} = b^m = b \cdot b^{m-1} > bm > 2m > m+1$

لذلك فإنّ المتباينة صحيحة لكل $m \ge 2$ ولكل $b > 2$.

نســتنتج مــن (1) و (2) أنّ الــزوج $m = 2$ و $b = 2$ هــو الحــل الوحيــد للمعادلــة $b^m = mb$.

لذلك عندما $a > b > 1$ و $a^b = b^a$ فبالضرورة $a = 4$ و $b = 2$.

عند التعويض في المعادلة نحصل فعلاً على المساواة $4^2 = 2^4$, ولذلك $a = 4$ و $b = 2$ هو الحلّ الوحيد.

أيهما أكبر a^b **أم** b^a ؟

التساؤل الذي نودّ الإجابة عليه الآن هو : إذا كان a و b عددين موجبين مختلفين , فمتى تتحقق المتباينة $a^b > b^a$, ومتى تتحقق المتباينة العكسية ؟

نفرض أنّ $a > b > 0$ (نفرض أيضا أنّ كليهما لا يساوي 1 فلو كان أحدهما مساويا ل 1 عندئذ تكون القضية بسيطة).

لاحظ أنّ $a^b > b^a \iff b\ln a > a\ln b \iff a\ln b - b\ln a < 0$.

يعود سبب ذلك الى كون الدالة اللوغاريتمية $\ln x$, دالة تصاعدية.

نثبّت a ونجعل b متغيراً . نعرف الدالة $f(x)$ على النحو التالي :

$$f(x) = a\ln x - x\ln a$$ في المجال $0 < x < a$.

$$\Leftarrow \qquad f'(x) = \frac{a}{x} - \ln a$$

حالة أ

إذا كان $0 < a < 1$ فإنّ $\ln a < 0$. لذلك $f'(x) > 0$ لكل x . لذلك $f(x)$ دالة تصاعدية .

بما أنّ $a > b$ فإنّ $f(a) > f(b)$. ولكن $f(a) = 0$. لذلك $f(b) < 0$. اي أنّ $a\ln b < b\ln a$. لذلك $a^b > b^a$.

استنتاج 1

اذا كان	$0 < b < a < 1$	فان	$b^a < a^b$

حالة ب

نفرض أنّ $a > 1$.

$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0=\dfrac{a}{\ln a}$. $f''(x)=-\dfrac{a}{x^2}$. لــــذلك النقطــــة $x_0=\dfrac{a}{\ln a}$ نقطة نهاية عظمى .

بما أنّ الدالة $f(x)$ مقعرة في كل مجال التعريف, فإنّ x_0 نقطة نهاية عظمى مطلقة. لذلك

$$M=Maxf(x)=f\left(\frac{a}{\ln a}\right)=a\ln\left(\frac{a}{e\ln a}\right)$$

اشارة M تحددها قيمة التعبير $\dfrac{a}{e\ln a}$.

من الواضح أنّ $M=0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{e\ln a}=1 \quad \Leftrightarrow \quad a=e$.

$M>0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a}{e\ln a}>1 \quad \Leftrightarrow \quad a>e\ln a$ (لاحظ أنّ $\ln a>0$ لأن $a>1$) .

لأي قيم a تتحقق المتباينة $a>e\ln a$ ؟

للإجابة على هذا السؤال , نعرف الدالة $g(x)$ على النحو التالي :

$g(x)=x-e\ln x$. لذلك $g'(x)=1-\dfrac{e}{x}$ و $g''(x)=\dfrac{e}{x^2}$.

$g'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=e$. بما أنّ $g(x)$ محدّبة فإنّ النقطة $x=e$ هي نقطـة نهاية صغرى مطلقة. ولكن $g(e)=0$. لذلك $g(x)>0$ لكل $e\neq x>0$.

لذلك : لكل $e\neq x>0$ تتحقق المتباينة $x>e\ln x$.

استنتاج 2:

لكل $e\neq x>0$ تتحقق المتباينة $x>e\ln x$

نستنتج من ذلك أنّ لكل $e\neq x>1$ يتحقق : $x>e\ln x$.

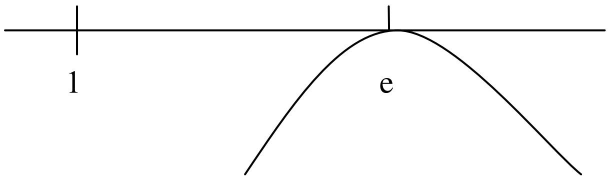
لذلك :

إذا كان $a>1$ فإنّ $Maxf(x)=M>0$ ونحصل عليه في النقطة $x_0=\dfrac{a}{\ln a}$.

نرسم منحنى $f(x)$ بناءأ على النتائج التي حصلنا عليها.

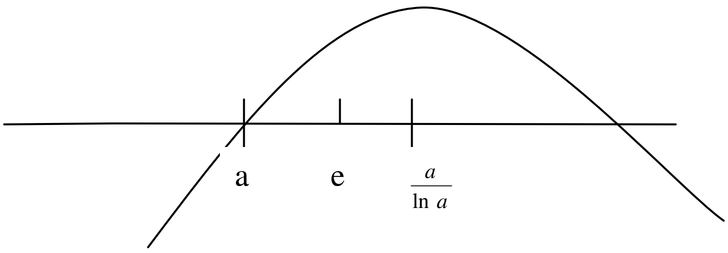
وضع 1

عندما $M = 0$



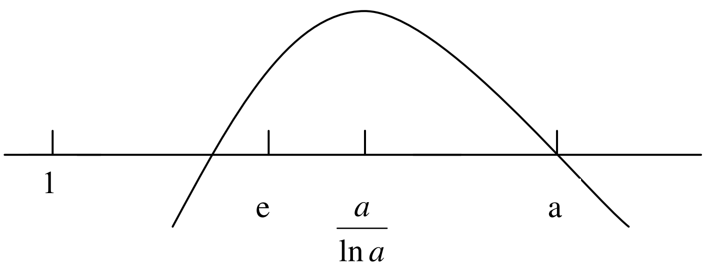
وضع 2

$(a < e \quad \Leftrightarrow) \quad a < \frac{a}{\ln a}$



وضع 3

$(a > e \Leftrightarrow) \quad a > \frac{a}{\ln a}$



بنــاءاً علــى وضــع 1 $(a=e)$ لكــل $0<b\neq e$ يتحقــق $f(b)<0$ وهــذا مكــافيء ل $b^e<e^b$.

استنتاج 3

لكل $0<b\neq e$ يتحقق $b^e<e^b$

بناءاً على وضع 2: لكل $1<x<a$ يتحقق $f(x)<0$. ولذلك $x^a<a^x$.

استنتاج 4

اذا كان $1<b<a<e$ فإنّ $b^a<a^b$

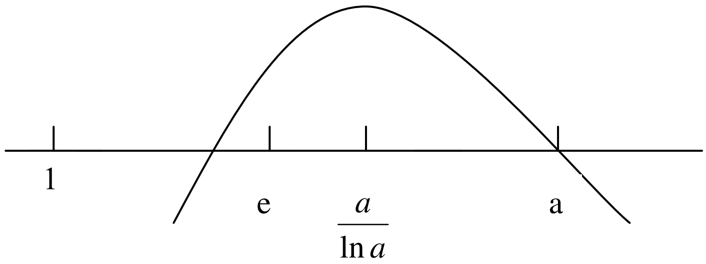
من كلا الاستنتاجين (3) و (4) نستخلص ما يلي :

اذا كان $1<b<a\leq e$ فان $b^a<a^b$

استنتاج 5

سنبحث الان في وضع 3 :

في هذه الحالة $a>e$.



الدالة $f(x)=a\ln x-x\ln a$ تساوي صفرا في نقطتين , $x=a$ هي إحدى هاتين النقطتين.

بما أنّ $f(1)=-\ln a<0$ و $f(e)=a-e\ln a>0$ فتوجد نقطة $1<u<e$ بحيث أنّ $f(u)=0$.

لاحظ صحة العلاقات الآتية :

إذا كان $u<b<a$ فإنّ $b^a>a^b$.

إذا كان $1<b<u$ فإنّ $b^a<a^b$. كما أنّ $a^u=u^a$

كيف نحسب u ؟

نعرف الدالة $A(x)$, عندما $x>e$, على النحو التالي :

$u=A(x) \Leftrightarrow x\neq a$ و $x^u=u^x$.

سنبحث الدالة $A(x)$.

حسب ما ذكر أعلاه : مجال تعريف الدالة $A(x)$ هو $\{x:x>e\}$. الدالة $A(x)$ معرفة جيداً . بمعنى أنّ لكل $x>e$, $A(x)$ موجود ووحيد.

كما أنّ لكل $x>e$ يتحقق $1<A(x)<e$. (أي أنّ مجال الدالة $A(x)$ هو $\{x:x>e\}$ ومداها $\{x:1<x<e\}$.

نعرف الدالة $g(u)=x\ln u-u\ln x$. (x ثابت و u متغير) . من الواضح أنّ :

$g'(u)=\frac{x}{u}-\ln x$ وأنّ $\frac{x}{e}-\ln x<g'(u)<x-\ln x$. بمــــــا أنّ

$x>e\ln x$

لكل $0<x\neq e$ (حسب استنتاج 3) فإنّ $g'(u)>0$ لذلك فإنّ الدالة $g(u)$ تصاعدية

نعرف الدالة : $T(u)=-\frac{3}{4(x-\ln x)}(g(u))+u$. هذه الدالة تحقق:

$0<T'(u)<1-\frac{3}{4e}\left(\frac{x-e\ln x}{x-\ln x}\right)<1$. وبمـــا أنّ $g(1)=-\ln x<0$ وبمـــا أنّ

$g(e)=x-e\ln x>0$ و $T(u)$ تصاعدية فإنّ $T:[1,e]\rightarrow[1,e]$

وتوجــد لهــا نقطــة ثابتــة لكــل x . لــو رمزنــا للنقطــة الثابتــة ب $A(x)$ فــإنّ

$T(A(x))=A(x)\Leftrightarrow g(A(x))=0\Leftrightarrow x^{A(x)}=(A(x))^x$.

المتوالية المعرفة حسب القانون التراجعي:

$$u_0=2$$
$$u_{n+1}=T(u_n)\qquad \forall n\in N$$

هي متوالية متقاربة ونهايتها هي النقطة الثابتة $A(x)$.

תקציר:

בעיה בחזקות

במאמר זה נענה על השאלה : לאילו ערכי a ו b הטבעיים , $a>b$, מתקיים $a^b=b^a$.

נראה שהפתרון היחיד הוא : $a=4,b=2$. נמצא תנאים על a ו b כדי שיתקיים אי השוויון $a^b>b^a$. נציע במאמר דרך איטרטיבית לפתרון המשוואה $x^b=b^x$ כאשר $x>1$ ו $x>b>1$.