مبدأ بيت الحمام
עקרון שובך היונים

إيناس قعدان، علي عثمان

مقدمة

مبدأ بيت الحمام والذي يدعى أيضا "مبدأ ديريخليه" (עיקרון דיריכלה) هو مبدأ بسيط جدًا. لكنه أحد الطرق الحكيمة التي بواسطتها يمكن إثبات العديد من الادعاءات المهمة والمعقدة أحيانًا في مجال علم الأعداد (קומבינטוריקה) وفي مجالات أخرى في الرياضيات.

إن استعمال المبدأ شائع لإثبات صحة ادعاءات رياضية، لكن الحكمة تكمن في إيجاد الطريقة لتحويل القضيّة التي نودّ إثباتها إلى وضع يتلاءم مع هذا المبدأ.

ديريخليه Lejeune Dirichlet (1805-1859) وهو عالم رياضيات ألماني هو من وضع الصيغة الرياضية لمبدأ بيت الحمام واستعملها لبرهان ادعاءات رياضيّة.

من المهم ذكره أن الصيغة الأصلية للمبدأ لم تتعامل بتاتًا مع حمام. ديريخليه تحدث بالأساس عن اللآلىء (פנינים) التي يمكن وضعها في جوارير، لذلك ما زال المبدأ يدعى بالألمانية بـ "مبدأ الجوارير". الترجمة الإنجليزية للموضوع تعاملت مع رسائل/مكاتيب التي يتم توزيعها على صناديق البريد (Pigeonholes). في العبرية والعربية تم التعامل معه باسم "עקרון שובך היונים" مبدأ بيت الحمام.

أقترح تعليم هذا الموضوع في المرحلتين الإعدادية والثانوية للجمال الذي يكمن في بساطته وفي كيفية توظيفه لبرهان قضايا, لولاه لاستعصى أو تعقّد أمرها.

1. مبدأ بيت الحمام:

إذا أدخلنا n+1 حمامة إلى n غرف فإنه يوجد على الأقل غرفة واحدة فيها على الأقل حمامتان.

اتفاق:

(1) في الصفحات القادمة سنتعامل فقط مع مصطلح "مبدأ بيت الحمام"، واستعمال كلمة "غرفة" للدلالة على الخلية الواحدة، واستعمال كلمة حمامة–للمفرد، حمامتان–للمثنى، حمام–للجمع.

(2) عندما نقول: يوجد k كذا..... فإنّ هذا يعني وجود على الأقل k كذا.....

<u>قضايا بسيطة يتمّ برهانها حسب مبدأ بيت الحمام:</u>

1. من بين كل 3 أشخاص يوجد شخصان من نفس الجنس. (أيّ: يوجد شخصان من نفس الجنس على الأقل).
2. من بين كل 13 شخصًا يوجد شخصان ولدا في نفس الشهر.
3. من بين 366 تلميذاً من تلاميذ الصف السابع الذين ولدوا سنة 1994 يوجد تلميذان لهما نفس تاريخ الميلاد. هذه القضيّة تبدو بديهية واضحة، طبعًا بسبب وجود 365 يومًا في سنة 1994. لكن الحقيقة بأنه يوجد شخصان في العالم لهما تماما نفس عدد شعرات الرأس تبدو أقل وضوحًا من سابقتها، رغم أنها تعتمد على نفس المبدأ. لإثبات هذه الحقيقة نعتمد على المعلومة إن للإنسان على الأكثر 000.100 شعرة على رأسه، لكن في العالم يوجد 6 مليارات إنسان.

برهنة مبدأ بيت الحمام

بالرغم من وضوح مبدأ بيت الحمام حدسيّاُ (אינטואיטיבית)، فهو ليس من البديهيات الرياضيّة. لذلك يقتضي البرهان. فيما يلي برهانه بطريقتين:

برهان أ – بالفرض الخاطئ:

نفرض بالفرض الخاطئ أنه في كل غرفة توجد حمامة واحدة على الأكثر، لذلك عدد الحمام هو على الأكثر n ، وهذا مناقض للفرض.

برهان ب – بالاستقراء الرياضي:

لـ $k=1$ الادعاء واضح (الحمامتان في نفس الغرفة). نفرض صحة الادعاء لـ $k+1$ حمام مع k غرف، ونبرهن صحته لـ $k+2$ حمام مع $k+1$ غرف.

الحمامة الأولى تدخل لأية غرفة (x)، توجد إمكانيتان:

أ. أن تدخل حمامة أخرى لنفس الغرفة(x).

ب. أن نوزع $k+1$ الحمام المتبقي على k الغرف المتبقية، وحسب الفرض توجد غرفة على الأقل فيها حمامتان.

وبذلك تم البرهان في الحالتين!

ملاحظات:

1. الصيغة الرياضية للمبدأ تقول بأنه لا توجد دالة واحد واحد وعلى (חח"ע) من المجموعة $\{1,2,\ldots,n,n+1\}$ إلى المجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$.
2. واضح أن الادعاء صحيح أيضًا عند وجود أكثر من $n+1$ حمام، وأنه ليس بالتأكيد صحيحًا عند وجود n حمام أو أقل.
3. إن المبدأ بحد ذاته هو إثبات "وجود"، لكن لا يمكنه تزويدنا بمعلومات حول الغرفة نفسها أو حول عدد الغرف التي فيها أكثر من حمامة.

نظريات وبراهين حسب مبدأ بيت الحمام

قضيّة:

بين كل 4 أعداد طبيعية مختلفة يوجد عددان بحيث أن الفرق بينهما يقسم على 3.

برهان:

بواقي القسمة الممكنة على 3 هي 0، 1، 2. نوزع الأعداد الأربعة (الحمام) على البواقي الثلاثة (الغرف)، بحيث نضع العدد في الغرفة التي تحمل باقي قسمته على 3. حسب مبدأ بيت الحمام يدخل عددان نفس الغرفة. معنى هذا انّه يوجد عددان لهما نفس باقي القسمة على 3. لذلك فإن الفرق بين العددين الأصليين (الذين باقي قسمتهما على 3 متساوٍ) يقسم على 3. هذا الفرق ليس صفرًا (لأن الأعداد المعطاة مختلفة).

نظريّة (تعميم):

بين كل $n+1$ أعداد طبيعية مختلفة يوجد عددان بحيث أن الفرق بينهما يقسم على n.

فكرة برهان النظريّة هي نفس فكرة برهان القضيّة السابقة.أترك البرهان للقارىء.

نظريّة:

معطى 12 عددًا مختلفًا يتألّف كلّ منها من رقمين. برهن أنه يمكن اختيار عددين من بينهم بحيث أنّ فرقهما عدد ذو رقمين متساويين.

برهان:

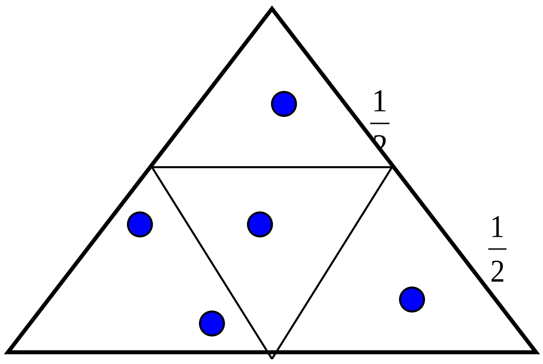
نقسم الـ 12 عددًا على 11 فنحصل على 12 باقٍ، من بينها فقط 11 باقياً مختلفاً (بسبب أن بواقي القسمة على 11 هي$0,1,2,\ldots\ldots..,10$)، حيث نعتبر الأعداد الأصلية "الحمام" والبواقي "الغرف". نسجل البواقي على الغرف ,كل باقٍ على غرفة. نوزّع الأعداد على الغرف, بحيث نضع العدد في الغرفة التي تحمل باقي قسمته على 11. حسب مبدأ بيت الحمام يدخل عددان نفس الغرفة. معنى هذا انّه يوجد عددان لهما نفس باقي القسمة على 11. لذلك فإن الفرق بين العددين الأصليين (الذين باقي قسمتهما على 11 متساوٍ) يقسم على 11. هذا الفرق ليس صفرًا (لأن الأعداد المعطاة مختلفة)، لذلك هو عدد ذو رقمين. من جهة أخرى كل عدد ذي رقمين يقسم على 11 هو عدد متساوي الرقمين. وهو المطلوب.

نظريّة:

خمس نقاط موجودة داخل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1. برهن أنه توجد نقطتان من بينها بحيث أن البعد بينهما أصغر من $\frac{1}{2}$.

برهان:

المستقيمات التي تصل منتصفات أضلاع المثلث تجزئه إلى أربعة مثلثات داخلية متساوية الأضلاع، طول ضلع كل منها $\frac{1}{2}$. من الواضح أنّ النقاط الخمس (الحمام) موزّعة على المثلثات الأربع (الغرف). لذلك حسب مبدأ بيت الحمام توجد على الأقل نقطتان في أحد المثلثات الداخليّة. قد تكون النقطتان في داخله, وقد تكون إحداها في داخله والأخرى على محيطه وقد تكون كلتاهما على محيطه. لكن, في الحالة الأخيرة, ينبغي أن تكون النقطتان داخليتين لأحد أضلاعه لأن النقاط الخمس داخليّة للمثلث الأصلي.في جميع الحالات من الواضح أن البعد بين النقطتين أصغر من $\frac{1}{2}$.



تمرين 1:

معطى مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 1 متر نريد وضع 10 مسامير عليه، برهن أنه يوجد مسماران البعد بينهما أصغر أو يساوي $\frac{1}{3}$.

تمرين 2:

سيرمي لاعب 5 أسهم. يفوز اللاعب إذا أدخل جميع الأسهم داخل مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه متران. برهن أنه إذا فاز فإنه بالتأكيد يوجد على الأقل سهمان البعد بينهما متر واحد على الأكثر.

نظريّة:

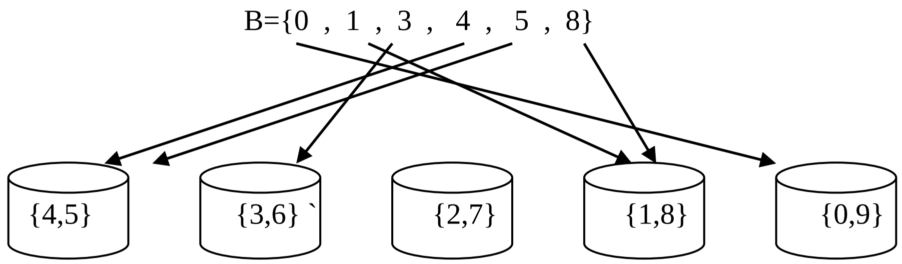
في كل مجموعة جزئية للمجموعة $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$ وذات 6 حدود يوجد حدّان مجموعهما 9.

برهان: نجزئ A لخمس مجموعات جزئية كالتالي: $\{0,9\}$, $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$. مجموع الأعداد في كل مجموعة جزئية هو 9. نتعامل مع المجموعات الجزئية الخمس على أنها غرف وإلى كل عدد من الستة التي سنختارها وكأنه حمامة. ندخل كل واحد من الأرقام الستة التي اخترناها إلى المجموعة الجزئية الملائمة له (أي الموجود فيها عدد مشابه)، مثلا الرقم 5 ندخله للطاقة $\{4,5\}$.

حسب مبدأ بيت الحمام توجد بالتأكيد غرفة تحوي حمامتين، مجموع العددين هو 9.

توضيح:

نأخذ B={0,1,3,4,5,8} مجموعة جزئية لـ A. ندخل كل عدد إلى الغرفة الملائمة له:



نظريّة:

التقى n أشخاص في حفلة وصافح بعضهم بعضًا (من الممكن أن بعضهم لم يتصافحوا). برهن أنه يوجد شخصان على الأقل صافحا نفس العدد من الأشخاص.

برهان:

عدد المصافحات الممكنة هو 0,1,...,n-1 (فالشخص لا يصافح نفسه!). لأول وهلة نعتقد أنه توجد n إمكانيات إلا أن الصحيح (عمليًا) يوجد n-1 إمكانيات، والسبب أنه إذا كان بينهم شخص "غريباً" لم يصافح أحداً منهم (عدد مصافحاته 0) فإنه من غير الممكن وجود شخص قد صافح n-1 أشخاصاً (لأن هذا يعني مصافحة باقي الحضور ومن ضمنهم "الغريب"). إذن لدينا n أشخاص (حمام) مع n-1 إمكانيات مصافحات (غرف) لذلك الإدعاء صحيح.

** النظريّة المكافئة لهذا النظريّة في علم التخطيطات (תורת הגרפים Graph theory) هي:

في كل تخطيط بسيط (غير موجّه وبدون "عروة"(Loop)) يوجد رأسان لهما نفس القيمة.

نظريّة:

إذا كانت رؤوس مخمس ABCDE نقاط شبكة في المستوى(أيّ ذات إحداثيات صحيحةLattice points)، فإنه يوجد على الأقل رأسان بحيث أن نقطة المنتصف بينهما هي أيضًا نقطة شبكة.

برهان:

نصنف النقاط الخمس A,B,C,D,E حسب إحداثياتها على النحو التالي: (زوجي، زوجي)، (زوجي، فردي)، (فردي، زوجي)، (فردي، فردي). حسب مبدأ بيت الحمام توجد نقطتان من نفس الصنف، نفرض أنهما A,B،بحيث أن مجموع إحداثيي x ومجموع إحداثيي y هما عددان زوجيان. لذلك فإن نقطة المنتصف هي نقطة شبكة.

2. مبدأ بيت الحمام الموسّع

ترميز:

ليكن $x \in R$ عدد حقيقي. نرمز بـ $\lceil x \rceil$ للعدد الصحيح الأقرب لـ x من الأعلى. نرمز بـ $\lfloor x \rfloor$ للعدد الصحيح الأقرب إلى x من الأسفل.

مثلاً: $4=\lceil 3.2 \rceil$ ، $5=\lfloor 5.7 \rfloor$ ، عندما تكون الأعداد سالبة $-3=\lceil -3.7 \rceil$ بينما $-6=\lfloor -5.7 \rfloor$.

3.مبدأ بيت الحمام الموسّع:

1. إذا وزعنا nk+1 حمام على k غرف فإنه توجد (على الأقل) غرفة واحدة فيها أكثر من n حمام (أي على الأقل n+1 حمامة).
2. إذا وزعنا m حمام داخل n غرف، فإنه توجد غرفة واحدة فيها على الأقل $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ حمام.

أترك البرهان للقارئ!!(حسب الفرض الخاطيء "بالتناقض")

الجميل في الموضوع أن مبدأ بيت الحمام يبدو مفهومًا ضمنًا لكن النتائج التي يمكن التوصل إليها بواسطته ذات عمق رياضي ومهمة جدًا وليست مفهومة ضمنًا.

نظريّة الألوان/المصافحات لرامزي – Ramsey

نظريّة Ramsey:

في كل مجموعة مكونة من 6 أشخاص, يوجد 3 أشخاص يعرف كل منهم الآخر، أو 3 أشخاص لا يعرف أيّ منهم الآخر (المعرفة هي علاقة تبادلية).

برهان:

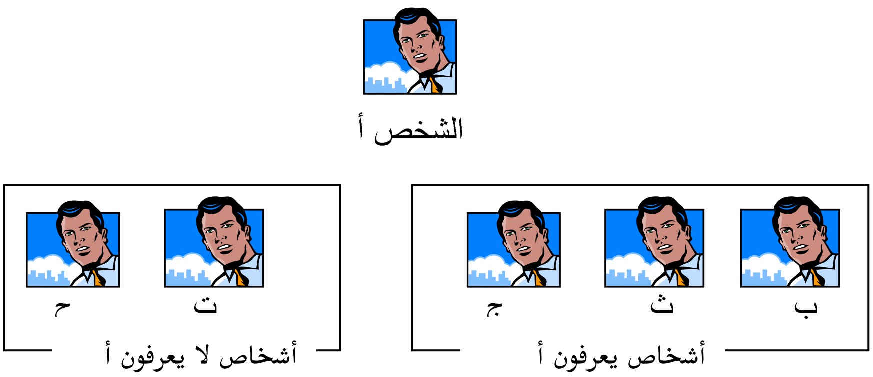
نرمز للأشخاص بـ: أ، ب، ت، ث، ج، ح. نختار أحدهم – نفرض أنه أ – ونوزع باقي الأشخاص على غرفتين. في الغرفة الأولى الأشخاص الذين يعرفون أ وفي الثانية الذين لا يعرفون أ (أنظر الرسمة).

حسب الصيغة الموسعة (بند 2) لمبدأ بيت الحمام، في إحدى الغرف يوجد على الأقل $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$ أشخاص. توجد إمكانيتان:

الحالة أولى: يوجد في الغرفة الأولى 3 أشخاص يعرفون أ: إذا كان اثنان من بينهم يعرف كل منهم الآخر، ومع معرفتهم لـ أ ينتج أنه يوجد (على الأقل) 3 أشخاص يعرف كل منهم الآخر. وإذا لم يكن الأمر كذلك (أي لم يكن شخصان من بينهم متعارفين) فينتج أنه يوجد 3 أشخاص لا يعرف ايّ منهم الآخر.

الحالة الثانية: يوجد في الغرفة الثانية 3 أشخاص لا يعرفون أ: إذا وجد اثنان من بينهم لا يعرف ايّ منهم الآخر، ومع عدم معرفتهم لـ أ فإننا نحصل على 3 أشخاص لا يعرف أيّ منهم الآخر. وإذا لم يكن الأمر كذلك أي أنّ الثلاثة يعرف كل منهم الآخر نكون قد حصلنا على المطلوب.

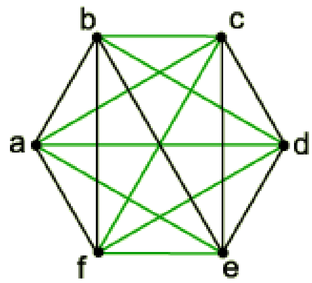
ملاحظة: من السهل الاقتناع بصحة النظريّة عندما يكون عدد الأشخاص اكبر من6.



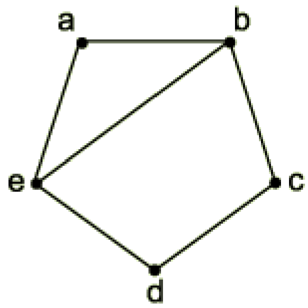
نظريّة Ramsey في التخطيطات:

أمامنا مجموعة من 6 أشخاص، وقد حصلت (أو لم تحصل) بينهم مصافحات. نناظر لكل شخص منهم نقطة، تسمى" رأساً". إذا تصافح شخصان من المجموعة مثلا طارق وريان، نصل بين الرأسين الملائمين لطارق وريان بخط أخضر، إذا لم يتصافحا نصل بين الرأسين الملائمين بخط أسود. الصورة التي سنحصل عليها هي تخطيط له 6 رؤوس وأضلاعه ملونة بالأخضر أو بالأسود، والتخطيط حتمًا سيكون متكاملا أي أن بين كل رأسين يوجد ضلع (شكل 1)، واضح أنه لا توجد أهمية لترتيب الرؤوس، والخطوط التي تصل الرؤوس (الأضلاع) ليست بالضرورة مستقيمة. التخطيط التوضيحي (شكل 2) فيه 5 رؤوس وهو ليس متكاملا (بسبب أن الرؤوس a و c على سبيل المثال ليست موصولة بضلع) وأضلاعه ليست ملوّنة.

التخطيط المتكامل لـ n رؤوس يرمز له بـ k_n.



شكل 1



شكل 2

<ins>إذن يمكن صياغة إدعاء المصافحات على النحو الآتي:</ins>

في كل محاولة لتلوين أضلاع k_6 بالأسود والأخضر، يوجد مثلث أسود أو مثلث أخضر.

ملاحظة:

"أو" هنا تعني و/أو. يوجد على الأقل مثلث أسود واحد، أو على الأقل مثلث أخضر واحد، أو الاثنان. في (رسم 1) لا يوجد مثلث أخضر لكن يوجد مثلث أسود رؤوسه e, d, c (عمليًا يوجد عدد من المثلثات السوداء).

صياغة الادعاء بصورة أوسع قليلاً

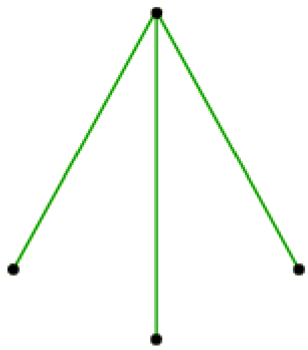
نظريّة

عند كل محاولة تلوين أضلاع k_6 بلونين مختلفين، ينتج مثلث أضلاعه ملوّنة بنفس اللون.

توضيح: عندما نتحدث عن لونين، لا يقصد أن استعمال اللونين إلزامي (فمثلا في مجموعة الست أشخاص إذا صافح كل منهم الآخر، فسنحصل على 15 ضلعاً أخضر، ولن يكون أيّ ضلع أسود)، فالمقصود أن كل ضلع سيتلون بأحد اللونين.

برهان:

نتمعن في k_6 الملونة أضلاعه باللونين (الأسود والأخضر)، ليكن x أحد رؤوسه، من الرأس x تخرج بالضبط 5 أضلاع. على الأقل 3 من بين الـ 5 أضلاع ملونة بنفس اللون، نفرض أنه أخضر. نتمعن في هذه الأضلاع الثلاثة xa, xb, xc **(شكل 3)**.



شكل 3

ننظر إلى الأضلاع ab,ac,bc إذا كان واحد على الأقل أخضر، هذا يعني وجود مثلث أخضر ورؤوسه x,a,b ، إذا لم يكن أي ضلع أخضر هذا يعني وجود مثلث أسود رؤوسه a,b,c . وهذا هو الادعاء الأساسي.

على هذا الادعاء يمكن أن نسأل:

لماذا بالذات 6؟ وهذا السؤال يتفرع لاثنين: ماذا يحدث عندما يكون عدد الرؤوس أكبر من 6؟ وماذا يحدث عندما يكون أصغر من 6؟

إدعاء:

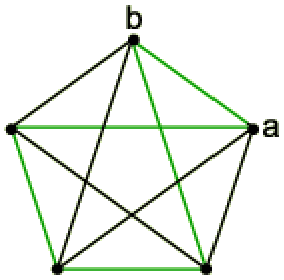
عندما $n \geq 6$ فإنه في كل محاولة تلوين أضلاع k_n (الرسم المتكامل لـ n رؤوس) بلونين، يوجد مثلث ذو لون واحد.

برهان:

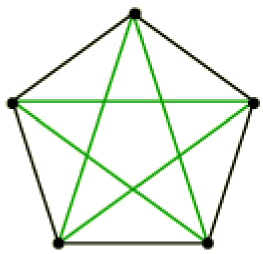
ليكن k_n و $n \geq 6$. حسب ادعاء 1 الأمر صحيح لـ $n = 6$ ، بالنسبة لـ $n > 6$ فإننا نتركز في 6 رؤوس و 15 ضلعًا حسب ادعاء 1 نرى أن الأمر أيضًا صحيح.

نفحص عندما $n < 6$: هل أضلاع K_5 يمكن تلوينها بالأسود والأخضر دون الحصول على مثلث بلون واحد؟ نتمعن بـ K_5 الذي أضلاعه ملونة. إذا وجد فيه رأس x بحيث أن ثلاثة

من الأضلاع الخارجة منه ملونة بنفس اللون، فإنه يوجد مثلث بلون واحد (حسب مراحل برهان الادعاء 1). إذن الإمكانية المتبقية (لعدم الحصول على مثلث بلون واحد) هي محاولة تلوين الأربع أضلاع الخارجة من نفس الرأس بحيث أن كل 2 بلون آخر. (رسم 4 و 5)



رسم 5



رسم 4

هذه الإمكانية مميزة، لأنها تؤدي حتمًا لظهور مخمس أخضر ولظهور مخمس أسود. في الرسم يمكن أن يظهر الخمس الأول "كنجم" داخل المخمس الثاني **(رسم 4)**، ويمكن أن يظهر المخمسان على شاكلة (شكل 5). لكن إذا تذكرنا أن لا معنى لشكل الخطوط، ولا تحديد لمكان الرؤوس فإننا سنعرف أن هذه مجرد معلومات خارجية لإمكانية وحيدة لتلوين أضلاع k_5 دون أن يظهر مثلث ذو لون واحد (هذا يعني: نعتبر الرؤوس مسامير موجودة على لوح خشبي، والأضلاع هي مطاط يربط بين المسامير. لو بدلنا المسمارين a,b **(رسم 5)** نحصل على الوضع في **(رسم 4)** لكن الألوان معكوسة، ولو قمنا بتبديلات إضافية سنحصل على نفس النتيجة لكن تنعكس الألوان. ففي جميع الأحوال لن نحصل على مثلث بلون واحد.

4.نظريّة أردش وسكراش (Erdos-Szekeres)

تعريف:

نقول عن متوالية $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ من الأعداد الحقيقية أنها متوالية تصاعدية (סדרה מונוטונית עולה) عندما $a_1<a_2<\dots<a_n$، ونقول أنها متوالية تنازلية (סדרה מונוטונית יורדת) عندما $a_1>a_2>\dots>a_n$.

تعريف:

لتكن $A:=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ متوالية أعداد حقيقية وليكن $1\le i_1<i_2<\dots<i_k<n$ أعدادًا طبيعية، فإن المتوالية $(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik})$ هي متوالية جزئية لـ A.

ماذا إذن عن المتوالية (5,3,8,10,17,2,6,4,21,1) ؟

واضح أنها ليست تصاعدية وليست تنازلية. لكن يمكن إيجاد متوالية جزئية منها (5,8,10,17,21) المكونة من الحدود a_1,a_3,a_4,a_5,a_9 والتي هي بحد ذاتها متوالية تصاعدية.

أيضًا المتوالية الجزئية 3,8,17 هي متوالية تصاعدية ولكنها قصيرة.

من الواضح أنه من السهل إيجاد متواليات ليس لها متوالية جزئية تصاعدية طويلة، أيضًا من السهل بناء متواليات ليس لها متواليات جزئية تنازلية طويلة. لكن كما يبرهن الإدعاء التالي لا يمكن إيجاد متوالية ليس لها لا هذه ولا تلك.

نظريّة أردش وسكراش (Erdos-Szekeres):

لكل متوالية من n^2+1 أعداد حقيقية مختلفة، توجد متوالية جزئية تحوي على الأقل $(n+1)$ أعداد تكون إما تصاعدية أو تنازلية.

برهان:

ليكن $S=n^2+1$ عدد عناصر المتوالية $A=(a_1,a_2,\ldots,a_s)$.

نلائم لكل $1 \le i \le s$, زوجاً من الأعداد الطبيعية (p_i,q_i) حيث أنّ: p_i هو الطول الأقصى للمتوالية الجزئية التصاعديّة لـ A والتي حدها الأول هو a_i، و- q_i بأنه الطول الأقصى للمتوالية الجزئية التنازلية لـ A والتي حدها الأول هو a_i.

مثال توضيحي:

في المتوالية $A=(5,3,8,10,17,2,6,4,21,1)$، $n=3$، وطول المتوالية هو $s=n^2+1=10$. ما هو p_4؟ علينا التمعن بمتواليات جزئية لـ A تصاعدية وتبدأ بـ $a_4=10$. من السهل أن نرى أن- 10,17,21 هي المتوالية الجزئية التصاعدية الأطول التي تبدأ بـ a_4، لذلك $p_4=3$. بشكل مشابه نجد أن $q_4=4$ لأن 10,6,4,1 هي المتوالية الجزئية التنازلية الأطول التي تبدأ بـ a_4.

والآن عودة للبرهان:

إذا وجد $1 \le i \le s$ بحيث أنّ $p_i \ge n+1$، فهذا يعني وجود متوالية جزئية تصاعدية لـ A (التي تبدأ بـ a_i) طولها $n+1$ على الأقل. بنفس الطريقة، إذا كان $q_i \ge n+1$ فقد برهن الإدعاء. نفرض الآن بالفرض الخاطئ أنّ $q_i \le n$، $p_i \le 1$ لكل i . حسب مبدأ الضرب (עיקרון המכפלה)، عدد الأزواج المختلفة من الصورة (x,y) عندما x,y أعداد صحيحة وتحقق $1 \le x,y \le n$ هو n^2. لذلك حسب مبدأ بيت الحمام من بين الأزواج $(p_1,q_1),(p_2,q_2),\ldots,(ps,qs)$، يجب أن تكون أزواج متشابهة لأن $s=n^2+1$، أي أنّ هناك

رمزين $j \le 1 < n \le k$ بحيث أن $p_j=p_k$ وأيضًا $q_j=q_k$. سنبرهن أنّ في هذه الحالة هناك تناقض!.

إذا $a_j<a_k$ فإنه بالتأكيد $p_j>p_k$. لنستوضح ذلك نتمعن في المتوالية الجزئية التي طولها p_k وتبدأ بـ a_k وأطول ما تكون. نضيف لبدايتها الحد a_j. بسبب أن $a_j<a_k$ فإننا سنحصل على متوالية جزئية تصاعدية أطول تبدأ بـ a_j وطولها p_k+1. لذلك حسب الإدعاء $p_j>p_k$. وعندما تكون $a_j > a_k$ فإنه يسهل الاستنتاج بطريقة مشابهة أن $q_j>q_k$.

حصلنا في جميع الحالات على تناقض لذلك ليس لكل i يتحقق $q_i \ge n$، $1 \le p_i$. هذا يعني بأنه توجد متوالية جزئية تصاعدية أو تنازلية بطول $n+1$.

תקציר

עקרון שובך היונים, או עקרון דיריכלה, יופיו טמון בפשטותו, וחשיבותו רבה בהוכחות משפטים מתמטיים.
במאמר זה אנו מציגים משפטים מתמטיים מעניינים מתחומים שונים במתמטיקה , ואת דרכי ההוכחות
שלהם ע"י שימוש בעקרון זה. אנו מציגים את החומר בצורה המתאימה להוראתו בחטיבת הביניים.

المراجع

1. גירון, שי&דר, שוני. מתמטיקה בדידה. אקדמיה הוצ׳ לאור, ללא תאריך.
2. ליניאל, נתי & פרנס, מיכל. מתמטיקה בדידה. בן צבי מפעלי דפוס, 2001.
3. רוס, שלדון. הסתברות – קורס ראשון. מה׳ 5, האונ׳ הפתוחה.