القانون التراجعي

ضحى غانم، علي عثمان

1. المقدمة

يلاقي موضوع المتواليات بشكل عام اهتماما شديدا لدى الطلاب، قدرتهم على ايجاد نمط تصرف المتوالية يعتبر بالنسبة لهم مقياسا لمهاراتهم العقلية.

في جيل مبكر يكتفي الطالب بتكهن الحد التالي للمتوالية، ولكن في جيل متقدم اكثر وعند تعلم موضوع المتواليات في المرحلة الثانوية, فانه يبدأ بالاهتمام بايجاد قانون الحد العام بدلالة n.وبسرعة يدرك ان التكهن هو وسيلة غير ناجعة.

مثال: بالنسبة لمتوالية فيبوناتشي لا يمكن تكهن قانون الحد العام وفي الكتب التعليمية لا يوجد شرح لطريقة ايجاد هذا القانون، واكتشاف الطريقة التي وصلوا اليها تبدو مستحيله.

في هذا المقال سيتم عرض طرق بسيطة "ربما" لايجاد قانون الحد العام لمتواليات معرفة بواسطة القانون التراجعي والمشابهه لمتوالية فيبوناتشي.

بداية مع المتواليات:

في المراحل الاولى يكتفي الطلاب بتكهن الحد التالي للمتوالية، مثلا في المتوالية 1...3,7,9, من السهل على الطالب اكتشاف كيفية تصرف المتوالية، ففي كل مرة نضيف 2 للحد للحصول على الحد الذي يليه. لكن ماذا بالنسبة للمتوالية: 36...22,15,11.5, ؟

يستطيع المعلم ان يضع الكثير من المتواليات بحيث يضمر على طريقة تصرف المتوالية (صيغة الحد العام). في هذه المتوالية نقسم الحد على 2 ونضيف له 4. $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 4$

سريعا ما يكتشف الطالب عدم نجاعة طريقة التكهن لمعرفة حدود المتوالية. كما ان هناك سؤالاً اضافياً وهو: ماذا بالنسبة لقانون الحد العام ولماذا نحن بحاجة الى قانون لايجاد الحد ال n ؟

في لمراحل الاولى يكتفي المعلم بان يكتب الطالب 3 او 4 حدود اضافية للمتوالية. ولكن اذا عدنا الى المتوالية 1...3,5,7,9, وطلبنا من الطلاب ايجاد الحد رقم 3551 فان رد الفعل الاولي

سيكون "متى سننتهي" ولذلك فإنّ طريقة الحساب التي تم اعتمادها سابقا تتضح هنا عدم نجاعتها.

لذلك يأتي دور قانون الحد العام الذي يمكننا من ايجاد قيمة أي حد نريده من خلال تعويض مكان الحد n في قانون الحد العام a_n.

<u>المتوالية الحسابية والمتوالية الهندسية:</u>

هناك انواع مختلفة من المتواليات منها المنتظمة وغير المنتظمة، التعامل الاكبر يكون مع المتواليات المنتظمة التي يمكن اكتشاف انماط تصرفها. وهنا تاتي المتوالية الحسابية والهندسية.

المتوالية الحسابية: هي متوالية اعداد، الفرق بين كل حدين متتاليين متساوي.

اذا كان d هو الفرق فان قانون الحد العام هو:

$a_n = a_1 + d(n-1)$ كما ان مجموع حدودها يكون $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$

تسمى المتوالية الحسابية هكذا لان كل حد هو عبارة عن معدل حسابي للحدين المجاورين له.

المتوالية الهندسية: هي متوالية اعداد فيها النسبة بين كل حدين متتاليين متساوية. أي ان كل حد في المتوالية يساوي الحد الذي قبله مضروب بعدد معين (النسبة الثابتة).

اذا كان a_1 هو الحد الاول و q هو نسبة المتوالية فان قانون الحد العام يكون:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ كما ان مجموع حدودها يكون $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$.

تسمى المتوالية الهندسية هكذا لان كل حد هو عبارة عن معدل هندسي للحدين المجاورين له.

القانون التراجعي:

يبدو واضحا من اسم هذا القانون اننا نحتاج الى معرفة الحدود السابقة لحد معين من اجل معرفة قيمته. أي اننا نعتمد الصيغة التراجعية. مثلا لايجاد الحد الخامس علينا معرفة الحد الرابع (متوالية خطية من الدرجة الاولى) وفي متواليات اخرى علينا ايجاد حدين ما قبل الحد الذي نريده (متوالية خطية من الدرجة الثانية).

مثال:

أراد احد مشجعي كرة القدم حضور مباراة. للدخول الى الملعب عليه المرور ب 3 بوابات، على كل بوابة يقف حارس. كل حارس يأخذ $\frac{1}{2}$ المبلغ ويرجع للمشجع شاقلين. إذا وصل المشجع إلى الملعب وكان معه 10 شواقل، فما هو المبلغ الأصلي الذي احضره المشجع؟

في مثل هذا السؤال يمكننا أن نعرف المبلغ الأصلي بشكل تراجعي عن طريق الرجوع الى الخلف.

ففي كل مرة ننقص 2 ونضرب ب2 (عكس الجمع والضرب، الطرح والقسمة).

الملعب **10**	البوابة الثالثة	البوابة الثانية	البوابة الاولى
	(10-2)2 16	(16-2)2 28	(28-2)2 52

المبلغ الأصلي كان 52 شاقل.

باستطاعة الطالب في البداية صياغة القانون التراجعي بالكلمات (كل مرة نأخذ نصف المبلغ السابق ونضيف 2) وفي مراحل متقدمة يمكنه صياغته بشكل رياضي:

$$a_1 = ?$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 2$$

وهنا يمكن ربط القانون التراجعي مع قانون الحد العام. اذا قمنا بسؤال الطالب عن المبلغ الذي كان مع المشجع بعد المرور بالبوابة الثانية، وفي سؤال متطور اكثر يدرك انه لا بد من ايجاد قانون الحد العام لان القانون التراجعي يلزمنا بمعرفة الحد السابق.

<u>متوالية فيبوناتشي:</u>

هناك علاقة ما بين نشأة القانون التراجعي ومتوالية فيبوناتشي. تلك المتوالية التي نشأت في اعقاب مسألة زوج الأرانب المشهورة وهي:

عندنا زوج أرانب (ولدت حديثاً) هذا الزوج ينجب عندما يبلغ الشهرين. وكل زوج ينجب زوج أرانب إضافي كل شهر. ما هو عدد الأزواج بعد 10 اشهر؟

هيا بنا نتعقب عدد أزواج الأرانب شهرا بعد شهر:

1) بالبداية كان هناك زوج ارانب فقط $\Leftarrow$ زوج واحد.

2) بعد شهر بقي زوج الارانب كما هو لان الارانب لا تتكاثر الا عندما تبلغ الشهرين $\Leftarrow$ زوج واحد.

3) في نهاية الشهرين وُلد زوج ارانب $\Leftarrow$ زوجان

4) في نهاية ال3 اشهر وُلد زوج آخر $\Leftarrow$ 3 ازواج

5) في نهاية ال 4 اشهر وُلد زوجان من الارانب $\Leftarrow$ 5 ازواج

6) في نهاية الشهر ال5 اشهر وُلد 3 ازواج $\Leftarrow$ 8 ازواج.

الآن يمكن الملاحظة انه في نهاية كل شهر يضاف الى الازواج التي كانت في نهاية الشهر السابق ازواج بنفس عدد الازواج التي كانت قبل شهرين، ومن هنا تأتي متوالية فيبوناتشي:

الحد الاول =1، الحد الثاني =1، وكل حد اضافي يساوي مجموع الحدين السابقين.

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

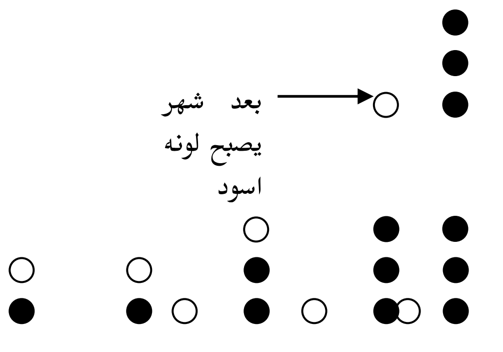
المتوالية التي نحصل عليها هي:

$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\underline{\mathbf{89}},\ldots$

بعد 10 اشهر عدد الازواج يكون 89 زوجاً.

● زوج بالغ .

○ زوج حديث الولادة .



ماذا يكون عدد الازواج بعد 120 سنة؟

لا حاجة للقلق واصل دراسة المقال ويمكنك معرفة قانون الحد العام لمتوالية فيبوناتشي وما عليك الا تعويض مكان الحد الذي تريده.

هناك مسائل كثيرة التي تخص متوالية فيبوناتشي كما ان هناك الكثير من الظواهر الطبيعية التي تظهر فيها هذه المتوالية مثلا في النباتات وبعض الكائنات الحية الاخرى، مثلا لولبة فيبوناتشي المشهورة يمكن ايجادها في الحيلزون او حتى في نبتة عبّاد الشمس.

من خلال هذا المقال سيتم عرض طرق مبسطة قدر الامكان لايجاد قانون الحد العام لمتواليات من الدرجة الاولى والثانية، بالاضافة الى انواع مختلفة من القانون التراجعي.

2. متوالية خطية من الدرجة الاولى

تعريف:

نقول ان المتوالية هي متوالية خطية من الدرجة الاولى اذا كانت معرفة حسب القانون التراجعي ذي الصورة:

$$a_n = a$$
$$a_{n+1} = u \cdot a_n + w \qquad n \geq 1$$

بحيث ان a, u, w اعداد ثابته حقيقية.

سؤال: متى تكون هذه المتوالية متوالية هندسية؟

✎ اذا كان $w = 0$ نقول ان المتوالية متجانسة. ومعروف ان متوالية خطية متجانسة هي متوالية هندسية، وقانون الحد العام عندها هو:

$$a_n = a \cdot u^{n-1}$$

مثال:

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} = 2a_n \qquad n \geq 1$$

هذه المتوالية هندسية فيها $a_1 = 3, u = 2$

$3,6,12,24\ldots$

بحيث ان u هي النسبة بين كل حدين متتاليين، لذلك قانون الحد العام لهذه المتوالية هو:

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

<u>سؤال:</u> متى تكون المتوالية حسابية؟

اذا كان $u = 1$ نقول ان المتوالية هي متوالية حسابية وقانون الحد العام عندها هو:

$$a_n = a + w(n-1)$$

حيث ان w هو الفرق بين كل حدين .

مثال:

$$a_1 = 3$$
$$a_{n+1} = a_n + 5 \qquad n \geq 1$$

هذه المتوالية حسابية فيها: $a_1 = 3, w = 5$

لذلك قانون الحد العام هو:

$$a_n = 3 + 5(n-1)$$

<u>سؤال:</u> معطى المتوالية التالية المعرفة بواسطة الدستور التراجعي. جد قانون الحد العام بدلالة n.

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 4 \qquad n \geq 1$$

نلاحظ ان هذه المتوالية هي لا حسابية ولا هندسية. قد يقترح البعض حلها حسب متوالية الفروق.

تعريف:

متوالية الفروق هي المتوالية الناتجة عن طريق ايجاد الفرق بين الحد والحد الذي يليه.

المتوالية التالية هي متوالية (اصلية) 2,8,20,44,92,...

متوالية الفروق لهذه المتوالية هي: 6,12,24,48,...

نلاحظ ان متوالية الفروق هي متوالية هندسية $a_1 = 6, q = 2$

ويمكن ايجاد الحد العام حسب القانون:

$$a_n = a_1 + S^*_{n-1}$$

حيث ان S_{n-1}^{*} هو مجموع ال (n-1) حدود الأولى من متوالية الفروق. اما a_1 فهو الحد الاول من المتوالية الاصلية و a_n هو قانون حدها العام. نجد S_{n-1}^{*} حيث أنّ b_1 هو الحد الأول لميوالية الفروق

$$S_{n-1}^{*} = \frac{b_1(q^{n-1}-1)}{q-1}$$
$$S_{n-1}^{*} = 6\cdot 2^{n-1} - 6$$

نعوض في المعادلة $a_n = a_1 + S_{n-1}^{*}$:

$$\Rightarrow a_n = 2 + 6\cdot 2^{n-1} - 6$$
$$= 6\cdot 2^{n-1} - 4$$
$$= 6\cdot 2^{n}\cdot\frac{1}{2} - 4 = 3\cdot 2^{n} - 4$$
$$\Rightarrow a_n = 3\cdot 2^{n} - 4$$

برهان القانون: $a_n = a_1 + S_{n-1}^{*}$:

$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$b_n = a_n - a_{n-1}$$

عند الجمع ينتج أنّ:

$$(b_1 + b_2 + ... + b_n) = a_n - a_1$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + S_{n-1}^{*}$$

<u>سؤال:</u> جد الحد العام للمتوالية المعرفة حسب الدستور التراجعي:

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = a_n + 3n \qquad n \ge 1$$

المتوالية الاصلية: 1...4,10,19,

متوالية الفروق الناتجة هي حسابية: $3...6,9,12$, فيها $a_1 = 3, d = 3$

لذلك:

$$S^*_{n-1} = \frac{n-1}{2}(2\cdot 3 + 3(n-1-1))$$
$$= \frac{n-1}{2}(6+3n-6 = \frac{3n^2-3n}{2}$$
$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{3n^2-3n}{2}$$

هناك حالات التي نضطر فيها الى ان نجد متوالية فروق لمتوالية الفروق. لذلك مع ان هذه الطريقة سهلة الا انها في حالات معينة غير ناجعة.

إيجاد الحد العام لمتوالية من الصورة :

$$a_n = a$$
$$a_{n+1} = u\cdot a_n + w \qquad n \ge 1$$

ما هو قانون الحد العام لهذه المتوالية عندما $w \ne 0, u \ne 1$.

نعرف متوالية جديدة b_n بحيث يتحقق $b_n = a_n + x$ ونحاول ايجاد قيمة x لتكون المتوالية b_n متوالية متجانسة.

$$b_n = a_n + x$$
$$\Rightarrow b_{n+1} = a_{n+1} + x$$

معروف ان $a_{n+1} = u\cdot a_n + w$

$$\Rightarrow b_{n+1} = u\cdot a_n + w + x$$

معطى ان $b_n - x = a_n$

$$b_{n+1} = u(b_n - x) + w + x$$

$$\Rightarrow b_{n+1} = u\cdot b_n - ux + w + x$$

متى تكون المتوالية هندسية؟

عندما يتحقق $-ux + w + x = 0$ لذلك:

$$x(1-u)=-w$$
$$\Rightarrow x=\frac{w}{u-1}$$
لذلك المتوالية المعرفة حسب الدستور التراجعي تكون (عوضنا n=1 في $b_n = a_n + x$) :

$$b_1 = a + \frac{w}{u-1}$$
$$b_{n+1} = u \cdot b_n \qquad n \geq 1$$

$\Leftarrow$ بما ان المتوالية هندسية يسهل ايجاد حدها العام وهو:

$$b_n = (a + \frac{w}{u-1}) \cdot u^{n-1}$$

وبما ان $b_n = a_n + \frac{w}{u-1} \Leftarrow a_n = b_n - \frac{w}{u-1}$

من هنا وجدنا قانون الحد العام ل a_n وهو:

$$a_n = (a + \frac{w}{u-1}) \cdot u^{n-1} - \frac{w}{u-1}$$

تلخيص:

ما حاولنا عمله هو تحويل متوالية غير متجانسة الى متجانسة وعندها تكون هندسية فيسهل ايجاد الحد العام لها.

سؤال: ماذا يحدث عندما $u=1$ ؟

مثال:

معطى متوالية معرفة بواسطة الدستور التراجعي. جد a_n بدلالة n.

$$a_1 = 2$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 5 \qquad n \geq 1$$

نلاحظ ان $w=5, u=3, a_1=2$

$$\Rightarrow a_n = (2+\frac{5}{2})\cdot 3^{n-1} - \frac{5}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(3^{n+1}) - \frac{5}{2}$$

هيا نفحص ماذا يحدث عندما يكون معامل a_n عددا سالبا = (-1).

$$a_1 = a$$
$$a_{n+1} = -a_n + w \qquad n \geq 1$$

نلاحظ ان u =-1

$$\Rightarrow a_n = (a-\frac{w}{2})(-1)^{n-1} + \frac{w}{2}$$
$$a_1 = a - \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = a$$
$$a_2 = -a + \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = w - a$$
$$a_3 = a - \frac{w}{2} + \frac{w}{2} = a$$

نلاحظ ان المتوالية تنتقل بين قيمتين فقط وهما :

a,w-a,a,w-a,a,...

نحصل على متواليات من هذا الشكل عندما معامل a_n هو (-1).

سؤال :

انظر الى قانون الحد العام $a_n = (a-\frac{w}{2})(-1)^{n-1} + \frac{w}{2}$ متى تكون هذه المتوالية ثابتة؟

✎ **حالة خاصة:** اذا كانت قيمة $a - \frac{w}{2} = 0$ فان المتوالية تكون ثابتة. نجد متى يتحقق ذلك.

اذا كان $w = 2a$ فان المتوالية تكون دائما ثابتة شرط ان يكون معامل a_n هو (-1).

تعميم:

من اجل ان تكون المتوالية ثابتة، على معامل a_n ان يكون سالبا او الحد الاول سالب او w<0. أي ان احدهما يجب ان يكون سالب، ولكن يجب ايضا ان يتحقق التساوي

$$-a = \frac{w}{u-1}$$

مثال:

$$a_1 = -3$$
$$a_{n+1} = 4a_n + 9 \qquad n \geq 1$$
$$\Rightarrow a_n = (-3 + \frac{9}{3})(4)^{n-1} + \frac{9}{3}$$
$$= 3$$
$$\Rightarrow a_n = 3$$

متوالية ثابتة.

3. متوالية خطية من الدرجة الثانية

تعريف:

نقول ان المتوالية هي متوالية خطية من الدرجة الثانية اذا كانت معرفة بواسطة القانون التراجعي ذي الصورة:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t \qquad n \geq 1$$

بحيث ان a, w, t, a, b ثوابت حقيقية.

<u>سؤال:</u> متى تكون المتوالية متوالية فيبوناتشي؟

اذا كان $a = b = u = w = 1$ و $t = o$ عندها تكون المتوالية متوالية فيبوناتشي الاصلية.

بشكل عام نحصل على متوالية فيبوناتشي عندما $a = b, w = u = 1, t =$

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad n \geq 1$$

<u>الانتقال من متوالية خطية من الدرجة الثانية الى متوالية خطية من الدرجة الاولى</u>

<u>سؤال:</u> كيف يمكننا الحصول على متوالية خطية من الدرجة الاولى عن طريق متوالية خطية من الدرجة الثانية؟

قد يظن البعض ان المتوالية تكون من الدرجة الاولى عندما u=0 . عندها نحصل على متوالية من الصورة:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a$$
$$a_{n+2} = w \cdot a_n + t \qquad n \ge 1$$

ولكن هذه المتوالية ليست من الدرجة الاولى لاننا نحتاج لمعرفة حدين ما قبل الحد الذي نريده.

$$\Rightarrow a_n = w \cdot a_{n-2} + t$$

ومعروف انه في متوالية من الدرجة الاولى نحتاج لمعرفة حد واحد ما قبل الحد المراد ايجاده.

اذاً ما هو الجواب؟

عندما w=0.

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + t \qquad n \ge 1$$

نعوض (n-1) مكان n.

$$\Rightarrow a_{n+1} = u \cdot a_n + t \qquad n \ge 2$$

وهذه متوالية خطية من الدرجة الاولى ابتداءً من المكان الثاني. وقد وجدنا قانون الحد العام لمثل هذه المتوالية.

<u>سؤال:</u> ما هي التغييرات المتوقعة على قانون الحد العام لمتوالية من الدرجة الاولى، في مثل هذه الحالة؟

بما ان المتوالية تكون خطية من الدرجة الاولى فقط ابتداءاً من المكان الثاني فان هناك بعض التغييرات وهي:

مكان الحد الاول نعوض الحد الثاني $a = b$.

مكان u^{n-1} نعوض u^{n-2} . لذلك قانون الحد العام يكون:

$$a_1 = a$$
$$a_n = (b + \frac{t}{u-1}) \cdot u^{n-2} - \frac{t}{u-1} \qquad n \ge 2$$

مثال:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4 \qquad n \geq 1$$

نعوض (n-1) مكان n

$$a_1 = 2$$
$$\Rightarrow a_2 = 4$$
$$a_{n+1} = 2a_n + 4 \qquad n \geq 2$$

$$u = 2, (t) w = 4, a = 4$$

$$\Rightarrow a_n = (4+4)2^{n-2} - 4$$
$$= 8 \cdot 2^{n-2} - 4$$
$$\Rightarrow a_n = 2(2^n - 2) \qquad n \geq 2$$

ايجاد قانون الحد العام لمتوالية من الصورة:

$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$$

تذكير: تم الشرح سابقا انه عندما $w = 0$ فان المتوالية تكون من الصورة $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1}$

اذا عوضنا (n-1) مكان n

$$\Rightarrow a_{n+1} = u \cdot a_n$$

وهذه هي متوالية هندسية يمكن حلها حسب قانون المتوالية الهندسية لايجاد الحد العام وهو:

$$a_n = a_1 \cdot u^{n-1}$$

هذه حالة خاصة عندما $w = 0$. لكن ماذا يحدث عندما $w \neq 0$؟ كيف يمكن ايجاد الحد العام عندها؟

من اجل الحصول على قانون الحد العام لمثل هذه المتوالية نقوم اولا باثبات بعض الادعاءات.

- ✓ **الادعاء الاول**

اذا كان x_1 هو حل المعادلة $x^2 = ux + w$ عندها المتوالية $a_n = x_1^n$ تحقق $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$ لكل n طبيعي.

البرهان:

نفرض ان $a_n = x_1^n$ عندها بالنسبة للمتوالية $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$ يتحقق:

$$x_1^{n+2} = u \cdot x_1^{n+1} + w \cdot x_1^n$$
$$\Rightarrow a_{n+2} = x_1^{n+2} = x_1^n \cdot x_1^2$$

بما ان $x_1^2 = ux + w$

$$\Rightarrow a_{n+2} = x_1^n (ux_1 + w)$$
$$= ux_1^{n+1} + wx_1^n$$
$$\Rightarrow a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$$

✓ **الادعاء الثاني**

اذا كانت المتوالية a_n تحقق $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$

واذا كانت المتوالية b_n تحقق $b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n$

فان المتوالية c_n المعرفة بواسطة $c_n = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n$ (α, β ثوابت) تحقق:

$$c_{n+2} = u \cdot c_{n+1} + w \cdot c_n$$

البرهان:

معطى ان $c_n = \alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n$ نعوض (n+2) بدل n

$$\Rightarrow c_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+2} + \beta \cdot b_{n+2}$$

نعوض a_{n+2} وb_{n+2}

$$\Rightarrow c_{n+2} = \alpha \cdot (u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n) + \beta \cdot (u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n)$$
$$= u(\alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot b_{n+1}) + w(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$$
$$\Rightarrow c_{n+2} = u \cdot c_{n+1} + w \cdot c_n$$

✓ **الادعاء الثالث**

اذا كان x_1 هو حل المعادلة $x^2 = ux + w$ فان المتوالية المعرفة حسب $a_n = n \cdot x_1^n$ تحقق:

$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$$

لكل n طبيعي.

البرهان:

بما ان x_1 هو حل للمعادلة $x^2 = ux + w$ فان $x_1 = \frac{u}{2}$ وايضا $w = \frac{-u^2}{4}$ لماذا؟

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2 + 4w}}{2}$$

نجد متى يكون ناتج الجذر=0 .

$$u^2 + 4w = 0$$

$$u^2 = -4w \Rightarrow w = \frac{-u^2}{4}$$

وايضا الحل يكون $x_1 = \frac{u}{2}$ ($\frac{-b}{2a}$).

$$a_n = n \cdot x_1^n$$

نعوض (n+2) بدل n :

$$\Rightarrow a_{n+2} = (n+2)x_1^{n+2}$$

نعوض $x_1 = \frac{u}{2}$

$$\Rightarrow a_{n+2} = (n+2)(\frac{u}{2})^{n+2}$$

$$= (n+2) \cdot \frac{u^2}{4} \cdot (\frac{u}{2})^n$$

حسب الادعاء فان $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n$

$$\Rightarrow u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n = u \cdot (n+1) \cdot x_1^{n+1} + w \cdot n \cdot x_1^n$$

نعوض $x_1 = \frac{u}{2}, w = \frac{-u^2}{2}, a_n = n \cdot x_1^n$

$$\Rightarrow= u\cdot(n+1)\cdot(\frac{u}{2})^{n+1}-\frac{u^2}{4}\cdot n\cdot(\frac{u}{2})^n$$
$$= u\cdot\frac{u}{2}\cdot(n+1)\cdot(\frac{u}{2})^n-\frac{u^2}{4}n\cdot(\frac{u}{2})^n$$
$$=(\frac{u}{2})^n(u\cdot\frac{u}{2}\cdot(n+1)-\frac{u^2}{4}\cdot n)$$
$$=(\frac{u}{2})^n(\frac{u}{2}\cdot(n+1)-\frac{u^2}{4}\cdot n)$$
$$=(\frac{u}{2})^n(\frac{u^2}{4}\cdot n+\frac{u^2}{2})$$
$$=(\frac{u}{2})^n(\frac{(n+2)\cdot u^2}{4})$$
$$=(\frac{u}{2})^n\cdot(n+2)\cdot\frac{u^2}{4}$$

هذه هي المتوالية
$$a_{n+2}=(n+2)x_1^{n+2}$$
$$\Rightarrow a_{n+2}=u\cdot a_{n+1}+w\cdot a_n$$

✓ **الادعاء الرابع**

اذا كان x_1 و x_2 حلول حقيقية مختلفة للمعادلة $x^2=ux+w$ ($w\neq 0$). فانه يوجد حل للهيئة

$$c_1x_1+c_2x_2=a$$
$$c_1x_1^2+c_1x_2^2=b$$

لكل a,b (c_1,c_2 مجاهيل) والحل وحيد (لان لكل متوالية يوجد قانون ل a_n بدلالة n واحد فقط) .

البرهان:

يكفي ان نبرهن ان المعاملات غير متناسبة لذلك نبين ان $x_1x_2^2\neq x_2x_1^2$.

عندما المحدد لا يساوي صفر يوجد حل وحيد للهيئة.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Rightarrow x_1x_2^2 - x_2x_1^2 \neq 0$$
$$x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1) \neq 0$$

وذلك لان:

1) $x_2 - x_1 \neq 0$ لماذا؟

لان x_1 و x_2 مختلفان لذلك $x_2 - x_1 \neq 0$ (معطى ان x_1 و x_2 حلول حقيقية مختلفة).

2) $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ لماذا حاصل ضرب الجذور لا يساوي 0؟

لان $w \neq 0$ ولذلك $x_1 \neq 0$ وكذلك $x_2 \neq 0$ لانه اذا كان $x = 0 \Rightarrow w = 0$ ولكن معطى ان ($w \neq 0$) وهذا تناقض.

✓ **الادعاء الخامس**

اذا كان x_1 حل للمعادلة $x^2 = ux + w$ ($w \neq 0$) فهناك حل وحيد للهيئة

$$c_1x_1 + c_2x_1 = a$$
$$c_1x_1^2 + 2c_2x_1^2 = b$$

لكل a,b (c_1, c_2 مجاهيل).

البرهان:

$x_1 \neq 0$ لان $w \neq 0$ ($x_1 = \frac{u}{2}$ و $w = \frac{-u^2}{4}$) هنا ايضا كما في البرهان السابق نبين ان المعاملات غير نسبية.

لان $x_1 \neq 0$ $\quad x_1 \cdot 2 \cdot x_1^2 - x_1 \cdot x_1^2 = x_1^3 \neq 0$

لذلك هناك حل وحيد للهيئة.

✓ **الادعاء السادس**

اذا كان x_1 و x_2 حلول غير حقيقية مركبة للمعادلة $x^2 = ux + w$ فهناك حل وحيد للهيئة

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a$$
$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b$$

لكل a,b ويتحقق $c_1 = \bar{c}_2$ (a, b, u, w حقيقية).

البرهان:

حسب الادعاء الرابع فانه يوجد حل وحيد. بقي ان نبرهن ان $c_1 = \bar{c}_2$.

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a$$
$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b$$

(c_1, c_2 مجاهيل)

(a,b اعداد حقيقية)

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} c_1x_1 + c_2x_2 = a \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b \end{matrix}$$

انتبه ان $x_1 = \bar{x}_2, x_2 = \bar{x}_1$ لان الحلول غير حقيقية

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \bar{c}_1\bar{x}_1 + \bar{c}_2\bar{x}_2 = a \\ \bar{c}_1\bar{x}_1^2 + \bar{c}_2\bar{x}_2^2 = b \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \bar{c}_1x_2 + \bar{c}_2x_1 = a \\ \bar{c}_1x_2^2 + \bar{c}_2x_1^2 = b \end{matrix}$$

أي ان :

$$\begin{matrix} \bar{c}_1x_2 + \bar{c}_2x_1 = a \\ \bar{c}_1x_2^2 + \bar{c}_2x_1^2 = b \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} c_1x_1 + c_2x_2 = a \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b \end{matrix}$$

بسبب وجود حل وحيد للهيئة $\Leftarrow$ $c_1 = \bar{c}_2$ و $c_2 = \bar{c}_1$

أي ان c_1 مرافق ل c_2 و c_2 مرافق ل c_1 .

مثال:

جد القانون التراجعي للمتوالية:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

نفرض ان $a_n = x^n$

$/ x^n$

$$\Rightarrow x^{n+2} = x^{n+1} + x^{n}$$

$$\Rightarrow x^{2} = x + 1$$

هذه معادلة تربيعية فيها $\Delta > 0$

$$x^{2} - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

لايجاد القانون نجد c_1 و c_2 لذلك نعوض في الهيئة:

$$c_{1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$c_{1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} + c_{2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} = 1$$

معادلتان بمجهولين نجد الحلول حسب المحدد.

$$c_{1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2}$$

$$= \frac{\frac{6-2\sqrt{5}-2+2\sqrt{5}}{4}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

مهمة: جد c_2.

الآن نعوض الحلول في قانون الحد العام

$$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$$

وهذا هو قانون متوالية فيبوناتشي.

للفحص نعوض $n = 1,2,3,...$

n=1 $$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})) = 1$$

n=2 $$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2) = 1$$

القانون الاول

اذا كان x_1 و x_2 الحلين الحقيقيين للمعادلة $x^2 = ux + w$ $(\Delta > 0)(w \neq 0)$ واذا كان c_1 و c_2 الحل لهيئة المعادلات

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 &= a \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 &= b \end{aligned}$$

فان قانون الحد العام للمتوالية :

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= b \\ a_{n+2} &= u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

هو

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$$

لكل $n \geq 1$

البرهان:

نبين ان المتواليتين التاليتين متساويتان (نفس المتوالية)

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 &= b \\ a_{n+2} &= u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \end{aligned} \qquad \text{و} \qquad b_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$$

نبرهن ذلك بواسطة الاستقراء الموسّع

لتكن K مجموعة الاعداد الطبيعية التي تحقق $a_n = b_n$.

$1 \in K$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ b_1 &= c_1x_1 + c_2x_2 \end{aligned}$$

بما ان (c_1 و c_2) حلول للهيئة:

$$* \quad c_1x_1 + c_2x_2 = a$$
$$** \; c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b$$

فان $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ (حسب *) أي ان $a = b_1$

$2 \in K$:

$$a_1 = b$$
$$b_2 = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$$

وحسب المعادلة الثانية في هيئة المعادلات(**) فان:

$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b$$

أي ان $b_2 = b$.

نفرض ان $1,2,3,\ldots\ldots, n, n+1 \in K$ ونبين ان $n+2 \in K$.

حسب الادعاء (1) و (2) نحصل على:

$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n$$

بالاعتماد على فرضية الاستقراء:

$b_n = a_n$ وايضا $b_{n+1} = a_{n+1}$ لذلك:

$$\Rightarrow b_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n = a_{n+2}$$

ينتج من ذلك ان $n+2 \in K$. لذلك k هي مجموعة كل الاعداد الطبيعية والمتواليتان متساويتان (نفس المتوالية) .

القانون الثاني

القانون السابق صحيح عندما ($\Delta > 0$) ماذا يحدث عندما ($\Delta < 0$)؟

عندما $\Delta < 0$ فاننا نحصل على اعداد مركبة لان تحت الجذر اعداد سالبة، من اجل ايجاد القانون نعتمد على الادعاء التالي:

ادعاء:

اذا كان x_1 و x_2 الحلول المركبة للمعادلة $x^2 = ux + w$ واذا كان (c_1 و c_2) حلّ الهيئة:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$$
$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b$$

فان قانون الحد العام للمتوالية:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \qquad n \geq 1$$

هو

$$a_n = 2\operatorname{Re}(c_1 \cdot x_1^n)$$

(Re تعني القسم الحقيقي للعدد المركب)

البرهان:

عند برهان القانون الاول لم تكن هناك اهمية للشرط ان تكون الحلول حقيقية. لذلك قانون الحد العام في حالة ان الحلين هما عددان مركبان هو نفس القانون: $a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$. ولكن، كما هو معروف اذا كان x_1 و x_2 حلاّ المعادلة $x^2 + ax + b = 0$ (a,b حقيقية) والحلول مركبة فان $\bar{x}_1 = x_2$. حسب الادعاء (6) $c_2 = \bar{c}_1$ ولذلك:

$$a_n = c_1 x_1^n + \bar{c}_1 (\bar{x}_1)^n = c_1 x_1^n + \overline{(c_1 x_1^n)}$$
$$= 2\operatorname{Re}(c_1 x_1^n)$$

مثال:

جد قانون الحد العام للمتوالية:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n \qquad n \geq 1$$

الحل:

$$u = 2, w = -2$$

$$x^{n+2} = 2x^{n+1} - 2x^n$$
$$\Rightarrow x^2 = 2x - 2$$
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm i$$
$$\Rightarrow x_1 = 1 + i$$
$$\Rightarrow x_2 = 1 - i$$

نجد c_1 و c_2

$$c_1(1+i) + c_2(1-i) = 1$$
$$c_1(1+i)^2 + c_2(1-i)^2 = 3$$
$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$
$$(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$$

نحل الهيئة حسب المحدد

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-i \\ 3 & -2i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2i & -2i \end{vmatrix}} = \frac{-3+i}{-4i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{1+3i}{-4}$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{-1}{4}(1+3i)$$

لذلك

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}(\frac{-1}{4}(1+3i)(1+i)^n)$$

يتم حلها حسب قانون ديموافر، اذ ان:

$$1+i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$$
$$\Rightarrow (1+i)^n = (\sqrt{2})^n(\cos 45°\cdot n + i\cdot\sin 45°\cdot n)$$

وقانون الحد العام عندها:

$$a_n = (\sqrt{2})^{n-2}(3\sin 45° n - \cos 45° n)$$

شرح مبسط عن قانون ديموافر:

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\frac{b}{r} = \sin\theta \Rightarrow b = r\sin\theta$$
$$\frac{a}{r} = \cos\theta \Rightarrow a = r\cos\theta$$
$$\Rightarrow a+bi = r(\cos\theta + \sin\theta i)$$
$$\Rightarrow (a+bi)^n = \left[\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+\sin\theta i)\right]^n$$
$$= (\sqrt{a^2+b^2})^n\left[\cos n\theta + \sin n\theta\right]$$

القانون الثالث

بقي ان نفحص ماذا يحدث عندما $\Delta = 0$.

عندما $\Delta = 0$ يوجد حل وحيد للمعادلة $x^2 = ux + w$. اذا كان x_1 هو الحل الوحيد للمعادلة $x^2 = ux + w$ واذا كان (c_1 و c_2) حلول للهيئة:

$$c_1 x_1 + c_2 x_1 = a$$
$$c_1 x_1^2 + c_2 x_1^2 = b$$

فان قانون الحد العام للمتوالية:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \qquad n \geq 1$$

هو

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot n \cdot x_1^n$$

نلاحظ انه عوضنا مكان $x_2^n \leftarrow n \cdot x_1^n$.

فبما ان x^n يحقق الشرط فان $n \cdot x^n$ يحقق الشرط ايضا. البرهان يتم بالاعتماد على الادعائين (3) و (5).

مثال:

جد قانون الحد العام للمتوالية:

$$a_1 = 6$$
$$a_2 = 8$$
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n \qquad n \geq 1$$

الحل:

عند حل المعادلة $x^2 = 4x - 4$ نحصل على حل وحيد لان $\Delta = 0$. الحل هو $x = 2$.

نجد c_1 و c_2 حسب الهيئة:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$$
$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b$$

لكن $x_1 = x_2$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2c_1 + 2c_2 = 6 \\ 2^2 \cdot c_1 + 2c_2 \cdot 2^2 = 8 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_1 + c_2 = 3 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} c_1 = 4 \\ c_2 = -1 \end{matrix}$$

نعوض في القانون

$$\Rightarrow a_n = 4 \cdot 2^n - n \cdot 2^n$$

$$a_n = 2^n (4 - n)$$

أمثلة على معادلات خطية من الدرجة الثانية

❖ جد قانون الحد العام للمتوالية التالية :

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_{n+2} = -2a_{n+1} + 15a_n \qquad n \geq 1$$

نفحص اولا هل $\Delta = 0$ ام $\Delta > 0$ ام $\Delta < 0$.

$$x^2 = -2x + 15$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

نلاحظ ان $\Delta > 0$ نجد حلول المعادلة.

$$\begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \end{matrix}$$

بما ان $\Delta > 0$ لذلك نستعمل القانون :

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$$

لايجاد القانون نجد اولا c_1 و c_2 حسب الهيئة :

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a$$
$$c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = b$$

a الحد الاول، b الحد الثاني:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3c_1 - 5c_2 = 1 \\ 9c_1 + 25c_2 = 2 \end{array} \quad /.5$$

نجمع:

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 15c_1 - 25c_2 = 5 \\ 9c_1 + 25c_2 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow 24c_1 = 7$$
$$\Rightarrow c_1 = \frac{7}{24}$$

نجد c_2

$$c_2 = \frac{3c_1 - 1}{5} = \frac{-1}{40}$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{-1}{40}$$

الآن نعوض في القانون:

$\Leftarrow$ قانون الحد العام هو:

$$a_n = \frac{7}{24} \cdot 3^n - \frac{1}{40} \cdot (-5)^n$$

❖ جد قانون الحد العام للمتوالية التالية:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 4$$
$$a_{n+2} = -4a_{n+1} - 4a_n \qquad n \geq 1$$

نجد $\Delta = ?$

$$x^2 = -4x - 4$$
$$x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$\Leftarrow$ $\Delta = 0$ يوجد حل وحيد للهيئة وهو $x = -2$

لذلك نستعمل القانون:

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot n \cdot x_1^n$$

نجد اولا c_1 و c_2 حسب الهيئة:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$$
$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b$$

نعوض ($x = -2, a = 1, b = 4$)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 2c_1 - 2c_2 = 1 \\ 4c_1 + 8c_2 = 4 \end{array} \qquad /.4$$

نجمع:

$$-4c_1 = 8$$
$$\Rightarrow c_1 = -2$$
$$c_2 = \frac{4+8}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$$

نعوض في القانون:

$$\Rightarrow a_n = -2 \cdot (-2)^n + \frac{3}{2} \cdot n \cdot (-2)^n$$
$$\Rightarrow a_n = (-2)^n (-2 + \frac{3}{2} \cdot n)$$

❖ جد قانون الحد العام للمتوالية التالية:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 5$$
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 6a_n \qquad n \geq 1$$

$$x^2 = 4x - 6$$
$$x^2 - 4x + 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-2}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = 2 = i\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow x_2 = 2 - i\sqrt{2}$$

جد c_1 و c_2 ثم اكمل الحل...

ايجاد قانون الحد العام لمتوالية من الدرجة الثانية

حتى الآن وجدنا قانون الحد العام لمتواليات من الصورة:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n \qquad n \geq 1$$

اما الان فسوف نجد قانون الحد العام لمتواليات من الصورة:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t \qquad n \geq 1$$

عندما $t \neq 0$

طريقة ايجاد القانون تشبه كثيرا طريقة ايجاد القانون لمتوالية خطية من الدرجة الاولى.

عندما $w \neq 0$ نعرف متوالية $\{b_n\}$ بواسطة $b_n = a_n + y$ ونحدد قيمة y بحيث تكون المتوالية b_n متجانسة.

في المتوالية $a_{n+2} = u \cdot a_{n+1} + w \cdot a_n + t$ نعوض الحد b_n مكان a_n

$$b_n = a_n + y$$
$$\Rightarrow a_n = b_n - y$$
$$\Rightarrow b_{n+2} - y = u \cdot (b_{n+1} - y) + w \cdot (b_n - y) + t$$
$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} - u \cdot y + w \cdot b_n - w \cdot y + y + t$$
$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n + y(1-u-w) + t = 0$$

من اجل ان تكون b_n متجانسة يجب ان يتحقق $y(1-u-w)+t=0$

نتطرق الى ثلاث حالات:

أ) اذا $u + w \neq 1$ $\Leftarrow$ $y = \dfrac{t}{u+w-1}$

لذلك المتوالية b_n تكون متجانسة وتحقق القانون التراجعي:

$$b_1 = a + \frac{t}{u+w-1}$$
$$b_2 = b + \frac{t}{u+w-1}$$
$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n$$

نلاحظ انه يمكن ايجاد قانون الحد العام ل b_n حسب احدى الثلاث طرق التي تم شرحها سابقا وذلك يتعلق ب Δ.

نجد a_n بواسطة $a_n = b_n - \dfrac{t}{u+w-1}$

لان $b_n = a_n - \dfrac{t}{u+w-1}$

مثال:

جد قانون الحد العام للمتوالية:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 5$$
$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n - 3$$

الحل: $u = 4, w = -4, t = -3$

نجد b_n

$$b_n = a_n + y = a_n + \frac{t}{u+w-1}$$

$$\frac{t}{u+w-1} = 3$$

$$\Rightarrow b_n = a_n + 3$$

نجد b_1 و b_2. من المتوالية معروف ان $a_1 = 3$

$$\Rightarrow b_1 = a_1 + 3$$
$$\Rightarrow b_1 = 6$$

$$b_2 = a_1 + 3$$
$$\Rightarrow b_2 = 8$$

لذلك لكل b_n نعرف القانون التراجعي:

$$b_1 = 6$$
$$b_2 = 8$$
$$b_{n+2} = 4b_{n+1} - 4b_n$$

نجد Δ لنعرف أي القوانين الثلاثة سوف نستعمل.

$$x^2 = 4x - 4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

$\Leftarrow$ $\Delta = 0$ نستعمل القانون:

$$b_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot n \cdot x_1^n$$

نجد اولا c_1 و c_2

$$
\begin{aligned}
2c_1 + 2c_2 &= 6 \\
4c_1 + 8c_2 &= 8
\end{aligned}
\qquad /.-4
$$

نجمع

$$
\begin{aligned}
&-4c_1 = -16 \\
&\Rightarrow c_1 = 4 \\
&c_2 = \frac{8-4c_1}{8} = \frac{8-16}{8} = -1 \\
&\Rightarrow c_2 = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow b_n = 4\cdot 2^n - n\cdot 2^n \\
&\Rightarrow b_n = 2^n(4-n)
\end{aligned}
$$

بقي ان نجد a_n :

$$a_n = b_n - \frac{t}{u+w-1}$$

الحد العام هو: $a_n = 2^n(4-n) - 3$

ب) الحالة الثانية عندما $u + w = 1$

نعرف متوالية $\{b_n\}$ بواسطة $b_n = a_n + n\cdot y$ ونحدد قيمة y بحيث نحصل على متوالية متجانسة. نجد b_{n+2}

$$
\begin{aligned}
b_{n+2} &= a_{n+2} + (n+2)y \\
&= u\cdot a_{n+2} + w\cdot a_n + t + (n+2)y
\end{aligned}
$$

ولذلك:

$$
\begin{aligned}
&b_{n+2} = u\cdot(a_{n+1} + y\cdot(n+1)) + w\cdot(a_n + ny) + t - uy\cdot(n+1) - wny + y\cdot(n+2) \\
&\Rightarrow b_{n+2} = u\cdot b_{n+1} + w\cdot b_n + t + ny\cdot(1-u-w) + y\cdot(2-u)
\end{aligned}
$$

بما ان $u + w = 1$ فمن اجل ان تكون b_n متجانسة يجب ان يتحقق:

$$t + ny(1-u-w) + y(2-u) = 0$$

ولكن $ny(1-u-w) = 0$ لان $u + w = 0$ لذلك بقي ان يتحقق ان :

$$t + y(2-u) = 0$$

اذا $u \neq 2$ نحصل على $\Rightarrow y = \dfrac{t}{u-2}$ ولذلك المتوالية $\{b_n\}$ تكون معرفة حسب القانون التراجعي :

$$b_1 = a + \frac{t}{u-2}$$
$$b_2 = b + \frac{t}{u-2}$$
$$b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n$$

نجد قانون الحد العام ل b_n حسب احدى القوانين الثلاث. ومن ثم نجد a_n حسب المعادلة :

$$a_n = b_n - \frac{n \cdot t}{u-2}$$

ج) الحالة الثالثة : اذا $u = 2, w = -1$.

هنا نحصل على المتوالية :

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + t$$

من المعادلة $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + t$ نحصل على $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + t$

اذا عرفنا متوالية $\{b_n\}$ بحيث تحقق $b_n = a_{n+1} - a_n$ عندها نحصل على المتوالية b_n المعرفة بواسطة الدستور التراجعي :

$$b_1 = b - a$$
$$b_2 = b - a + t$$
$$b_{n+1} = b_n + t$$

لان :

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$
$$b_1 = a_2 - a_1 = b - a$$

$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$a_3 = 2a_2 - a_1 + t$$
$$a_3 = 2b - a + t$$
$$\Rightarrow b_2 = 2b - a + t - b$$
$$\Rightarrow b_2 = b - a + t$$

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$$

ولكن حسب المعادلة $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + t$:

$$\Rightarrow b_{n+1} = a_{n+1} - a_n + t$$

ولكن $b_n = a_{n+1} - a_n$

$$\Rightarrow b_{n+1} = b_n + t$$

$\Leftarrow$ المتوالية المعرفة بواسطة الدستور التراجعي هي:

$$b_1 = b - a$$
$$b_2 = b - a + t$$
$$b_{n+1} = b_n + t$$

نلاحظ ان b_n هي متوالية حسابية لذلك نستطيع ايجاد b_n حسب:

$$b_n = a_n + d(n-1)$$
$$\Rightarrow b_n = (b-a) + t \cdot (n-1)$$

من هنا ينتج ان a_n هي متوالية حسابية من الدرجة الثانية (أي ان متوالية الفروق فيها هي حسابية) ويمكن ايجاد حدها العام عن طريق:

$$b_1 = a_2 - a_1$$
$$b_2 = a_3 - a_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$b_{n-1} = a_n - a_{n-1}$$
$$\Rightarrow b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_{n-1} = a_n - a_1$$

نجد مجموع الطرف الايسر بواسطة قانون المجموع للمتوالية الحسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + d(n-1))$$
$$\Rightarrow S_{n-1} = \frac{n-1}{2}(2a_1 + d(n-2))$$
$$\Rightarrow b_1 + b_2 + ... + b_{n-1} = \frac{n-1}{2}(2b_1 + t(n-2))$$

نعوض $b_1 = b - a$:

$$= \frac{n-1}{2}\left[2(b-a) + t(n-2)\right]$$
$$\Rightarrow S_{n-1} = \frac{n-1}{2}(2b - 2a + t(n-2)$$

من قانون المجموع نجد a_n .

$$S_{n-1} = a_n - a_1$$
$$\Rightarrow a_n = a_1 + S_{n-1}$$

قانون الحد العام هو:

$$a_n = a + \frac{n-1}{2}\left[2b - 2a + t(n-2)\right]$$

فحص:

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3 \qquad n \geq 1$$

$w = -1, u = 2$

نجد a_3 و a_4

$$a_3 = 2a_2 - a_1 + 3 = 8 - 2 + 3 = 9$$
$$a_4 = 2a_3 - a_2 + 3 = 18 - 4 + 3 = 17$$

نجد الآن a_3 و a_4 بالاعتماد على قانون الحد العام الذي وجدناه.

$t = 3, w = -1, u = 2$

$$a_1 = a_1 + 0 = a_1 = 2$$
$$a_2 = a_1 + \frac{1}{2}(8 - 4 + 0) = 4$$
$$a_3 = 2 + (8 - 4 + 3) = 9$$
$$a_4 = 2 + \frac{3}{2}(2 \cdot 4 - 4 + 3 \cdot 2) = 17$$

نلاحظ ان قانون الحد العام صحيح اذا كان $u = 2, w = -1$.

4.انواع اخرى للقانون التراجعي

❖ **ايجاد قانون الحد العام لمتوالية من الصورة:**

$$a_1 = a$$
$$a_2 = b$$
$$a_{n+2} = t \cdot a_{n+1}{}^{u} \cdot a_n{}^{w} \qquad n \geq 1$$

بحيث ان a, b, t موجبة و u, w حقيقي .ة

نعرف متوالية $\{b_n\}$ $b_n = \ln a_n$.

عندها :

$$\ln(a_{n+2}) = \ln t + u \cdot \ln a_{n+1} + w \cdot \ln a_n$$

أي ان $b_{n+2} = u \cdot b_{n+1} + w \cdot b_n + \ln t$

ولذلك المتوالية b_n تكون معرفة بالشكل التالي:

$$b_1 = \ln a$$
$$b_2 = \ln b$$
$$b_{n+2} = u b_{n+1} + w b_n + \ln t$$

الحد b_n نجده حسب احدى الطرق التي ذكرت سابقا بالاعتماد على Δ. بعد ايجاد b_n يمكننا ايجاد a_n بالاعتماد على التساوي:

$$a_n = e^{b_n}$$

5.مجموعة مسائل منوعة

1) معطى المجموعة $A=\{1,2,3,4,5\}$ ما هو عدد المتواليات بطولn والتي لا تحتوي حدين فرديين متتاليين؟

الحل:

a_n –عدد المتواليات بطول n والتي لا تحتوي حدين فرديين متتاليين.

a_{n+1} –عدد المتواليات بطول n+1 والتي لا تحتوي حدين فرديين متتاليين.

a_{n+2} –عدد المتواليات بطول n+2 والتي لا تحتوي حدين فرديين متتاليين.

_ كل متوالية بطول n+2 نحصل عليها من متوالية بطول n+1 مع اضافة حد آخر من A.

<table>
<tr><td>حد من A</td><td>n+1</td></tr>
<tr><td colspan="2">n+2</td></tr>
</table>

_ كل متوالية بطول n+1 نحصل عليها من متوالية بطول n مع اضافة حد آخر من A.

_ كل متوالية بطول n+1 تنتهي بعدد زوجي او فردي من المجموعة A.

_ عدد المتواليات التي طولها n+1 والمنتهية بعدد زوجي هو $2a_n$. (لانه بالامكان اضافة عدد زوجي في نهاية المتوالية التي طولها n ولانه لا يوجد الا عددان زوجيان (4,2)).

a_n	,42
$a_n \cdot 2 = 2a_n$	

_ لذلك عدد المتواليات بطول n+1 التي تنتهي بعدد فردي هو: $a_{n+1} - 2a_n$.

_ عدد المتواليات بطول a_{n+2} والتي نحصل عليها من متواليات بطول n+1 من النوع

a_n	,42	5 **امكانيات**
$2a_n$		
$5 \cdot 2a_n$		

هو $5 \cdot 2a_n$

_ بينما عدد المتواليات بطول n+2 التي نحصل عليها من متواليات بطول n+1 من النوع

a_n	**فردي**	,42
$a_{n+1} - 2a_n$		
$2(a_{n+1} - 2a_n)$		

هو $2(a_{n+1} - 2a_n)$

لذلك:

$$a_{n+2} = 10a_n + 2(a_{n+1} - 2a_n)$$
$$\Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$$

واضح ان $a_1 = 5$ (عدد المتواليات التي طولها 1 هو 5 متواليات).

نحسب $a_2 = ?$

2 5

=10

أي عدد	عدد زوجي

هذا هو عدد المتواليات التي حدها الاول زوجي.

3 2

=6

عدد زوجي	عدد فردي

هذا هو عدد المتواليات التي حدها الاول فردي.

$$a_2 = 10 + 6 = 16$$

لذلك القانون التراجعي هو:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = 16$$
$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$$

من اجل ايجاد قانون الحد العام نحل المعادلة:

$$x^2 = 2x + 6$$
$$x^2 - 2x - 6 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm \sqrt{7}$$

يوجد حلان مختلفان $\Delta > 0$ لذلك قانون الحد العام يكون من الصورة:

$$a_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$$
$$\Rightarrow a_n = c_1(1+\sqrt{7})^n + c_2(1-\sqrt{7})^n$$

نجد c_1, c_2 حسب هيئة المعادلات:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = a$$
$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = b$$

$$a = a_1 = 5$$
$$b = a_2 = 16$$

$$c_1(1+\sqrt{7})+c_2(1-\sqrt{7})=5$$
$$c_1(1+\sqrt{7})^2+c_2(1-\sqrt{7})^2=16$$

نحل الهيئة بالاعتماد على المحدد.

$\Leftarrow$ الحلول هي:

$$c_1=\frac{7+4\sqrt{7}}{14}$$
$$c_2=-\frac{-7+4\sqrt{7}}{14}=\frac{7-4\sqrt{7}}{14}$$

ومن هنا نحصل على قانون الحد العام:

$$a_n=\frac{7+4\sqrt{7}}{14}\cdot(1+\sqrt{7})^n+\frac{7-4\sqrt{7}}{14}\cdot(1-\sqrt{7})^n$$

2) معطى المجموعة $A_n=\{1,2,3,4,.........,n\}$ ما هو عدد المجموعات الجزئية المحوية في المجموعة A_n والتي لا تحتوي حدين متتاليين. (المجموعة الفارغة واحدة منها)

t_n – عدد المجموعات الجزئية التي تحقق الشرط للمجموعات الجزئية ل A_n.

مثلا: t_4 عدد المجموعات الجزئية ل $\{1,2,3,4\}$، t_2 عدد المجموعات الجزئية ل $\{1,2\}$.

$$\phi \Rightarrow t_0 = 1$$
$$\{1\} \rightarrow \{1\}, \phi \Rightarrow t_1 = 2$$
$$\{1,2\} \rightarrow \{1\}, \{2\}, \phi \Rightarrow t_2 = 3$$
$$\{1,2,3\} \rightarrow \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}, \phi \Rightarrow t_3 = 5$$
$$\{1,2,3,4\} \rightarrow \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \phi \Rightarrow t_4 = 8$$

المجموعات التي تحتوي n+2 لا يوجد فيها الحد n+1 (لان n+2 وn+1 حدان متتاليان) ولكن قد يوجد فيها الحد n.

$\Leftarrow$ عدد المجموعات الجزئية ل A_{n+2} التي تحوي n+2 يساوي t_n (مجموعات جزئية ل A_n).

$\Leftarrow$ عدد المجموعات الجزئية ل A_{n+2} التي لا تحوي n+2 التي تحقق الشرط يساوي عدد المجموعات الجزئية ل A_{n+1} وهو يساوي t_{n+1}. (اذا لم تحو الحد n+2 فانها تحوي الحد n+1).

$$t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$$

المجموعات الجزئية ل A_{n+2}	=	المجموعات الجزئية التي تحوي n+2. أي تحوي n.	+	المجموعات الجزئية التي لاتحوي n+2. أي تحوي n+1

$\Leftarrow$ حصلنا على متوالية فيبوناتشي.

قانون الحد العام عندها هو:

$$a_n = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

(انتبه استعملنا هذا القانون لان الحد الاول 1 والثاني 2 وليس الاول 1 والثاني 1 كما في المتوالية الاصلية لفيبوناتشي).

3) اراد احد المواطنين التحدث الى الملك. عليه المرور ب5 بوابات (محطات)، على كل بوابة يقف حارس. كل حارس ياخذ $\frac{1}{2}$ المبلغ الذي يملكه، ويرجع له دينار. وصل هذا المواطن الى الملك وبقي معه 10 دنانير. ما هو المبلغ الاصلي الذي كان مع هذا المواطن؟

هذه المسألة تعتمد على القانون التراجعي، اذ اننا نعرف المبلغ النهائي وعلينا معرفة المبلغ الاصلي.

$$a_1 = a$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad n \geq 1$$

نجد a (الحد الاول) بالاعتماد على قانون الحد العام

$$a_n = (a + \frac{w}{u-1}) \cdot u^{n-1} - \frac{w}{u-1}$$

بحيث ان $a_6 = 10, w = 1, u = \frac{1}{2}$

$$10 = (a + \frac{1}{\frac{1}{2}-1}) \cdot (\frac{1}{2})^{6-1} - \frac{1}{\frac{1}{2}-1}$$
$$10 = (a-2) \cdot \frac{1}{32} + 2$$
$$8 \cdot 32 = a - 2$$
$$\Rightarrow a = 258$$

المبلغ الاصلي هو 258 دينار.

(انتبه: اعتبرنا الملك محطة سادسة).

تعميم السؤال:

عدد البوابات n. وصل الملك وكان معه مبلغ t . عند كل بوابة كان الحارس يأخذ $\frac{1}{m}$ من المبلغ ويرجع له r. ما هو المبلغ الاصلي؟

$$a_1 = a$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{m}a_n + r$$

$$a_n = t, w = r, u = \frac{1}{m}$$

$$a_n = (a + \frac{w}{u-1}) \cdot u^{n-1} - \frac{w}{u-1}$$

$$t = (a + \frac{r}{\frac{1}{m}-1}) \cdot (\frac{1}{m})^{n-1} - \frac{r}{\frac{1}{m}-1}$$

$$(t + \frac{rm}{1-m}) \cdot m^{n-1} = a + \frac{rm}{1-m}$$

$$\frac{(t(1-m)+rm)}{1-m} \cdot m^{n-1} = a + \frac{rm}{1-m}$$

$$\frac{m^{n-1} \cdot t - m^n \cdot t + rm^n - rm}{1-m} = a$$

المبلغ الاصلي هو:

$$\Rightarrow a = \frac{m^{n-1}t(1-m) + rm(m^{n-1}-1)}{1-m}$$

תקציר

במאמר זה אנו מביאים מספר דוגמאות של בעיות מתמטיות שניתן לפתור אותן באמצעות
נוסחות נסיגה. מצאנו את נוסחת האיבר הכללי של סוגים שונים של נוסחות נסיגה כגון:
נוסחות נסיגה ליניאריות מסדר ראשון, נוסחות נסיגה ליניאריות הומוגניות מסדרים גבוהים
ומקרים מיוחדים של נוסחות נסיגה לא הומוגניות.

المراجع

1. גירון,ש'; דר,ש'.(1999).מתימטיקה בדידה. ירושלים: אקדמיה הוצאה לאור.

2. דוד,ח'.(2004). סדרות אינדוקציה ונוסחאות נסיגה. על#ה- 43, 57-50.

3. דוד,ש'.(1998). מהילברט עד פיבונצ'י.(on line).
www.workjoke.com/puzzles/

4. עותמאן,ע'.(1993). על המעבר מנוסחת נסיגה אל נוסחה לפי המקום. על#ה- 23, 68-62.