دمج تاريخ الرياضيات في تعليم وتعلم الرياضيات

وجيه ظاهر

> بعد أن عين أبي موظف دولة في بيت الرسوم الجمركية في بوجيا (في الجزائر– المؤلف) لتمثيل التجار البيزيين (مواطني بيزا وهي مدينة إيطالية – المؤلف) الذين تدفقوا عليها, وتسلم المنصب, وبسبب ما يوليه من أهمية لهذه المهنة جعلني, في صباي, آتي إليه وأرادني أن أكرس نفسي وأتعلم موضوع الحسابة خلال عدد من الأيام. هناك, وكنتيجة للتعليم المدهش الذي تلقيته في فن الصنعة, وخصوصا الارقام الهندية التسعة, معرفة ذلك الفن فتنني أكثر من غيري. ولقد عرفت أن وجوه هذه المعرفة المختلفة تدرس في مصر, سوريا, اليونان, سيسيليا وبرفنسيا, وذلك بطرق مختلفة. وفي هذه الأمكنة, وخلال عملي, تابعت تعلمي بعمق, وتعلمت الأخذ والعطاء في المناظرات.
> (ليوناردو فيبوناتشي, في كتابه ليبر أباسي (1228), كما جاء في O'Connor و Robertson (1998).

اهتمام جديد – قديم بدمج تاريخ الرياضيات في تدريس وتعلم الرياضيات

(فوائد الدمج)

هناك اهتمام متزايد اليوم بإدخال تاريخ الرياضيات إلى صف الرياضيات. هذا الاهتمام يرجع إلى عدة قرون, فمثلا خلال التجديدات التي حصلت في الجامعات البرتغالية, حوالي سنة 1772, أوصي بأن يربط معلمو وطلاب الرياضيات بين تعليم وتعلم الرياضيات وبين تاريخ الرياضيات (Estrada, 1993, حسبما جاء في Rosa, 2001). هذا الاهتمام يتزايد اليوم لسببين:

- محاولة تقديم طرق تدريس بديلة تحاول التغلب على مصاعب تعليم وتعلم الرياضيات.
- أنسنة الرياضيات وتقديمه على أنه علم يتطور دائما وجزء من حضارة إنسانية محددة.

هناك اليوم عدد متزايد من الأبحاث المتعلقة بدمج تاريخ الرياضيات في درس الرياضيات يشير إلى فوائد هذا الدمج للتربية الرياضية إن كان ذلك بالنسبة لمعلمي أو لطلاب الرياضيات. هذه الأبحاث تري أن دمج تاريخ الرياضيات في تعليم وتعلم الرياضيات يحسن إدراك معلمي وطلاب

الرياضيات لموضوع الرياضيات, كما يحسن توجههم نحو الموضوع وتحمسهم له (Arcavi وآخرون, 1982؛ Fauvel, 1991؛ Furinghetti, 2000). (Rose, 2001) تقول بأن دمج تاريخ الرياضيات في التعليم يجعل الطلاب ينظرون إلى تاريخ الرياضيات كعامل رابط يربط الرياضيات مع بعضه البعض عبر الزمن وعبر ميادينه المختلفة, كما أنه يجعلهم يعيشون الرياضيات وهو يصنع ويؤدي إلى أن ينظروا إلى الرياضيات على أنه مشروع من صنع إنساني ... دينامي وخلاق. بعض الباحثين يشيرون إلى تأثير دمج تاريخ الرياضيات في تعليم وتعلم الرياضيات على تقليل قلق وخوف الطلاب من تعلم الرياضيات (Marshall & Rich, 2000؛ Swetz, 1984).

بعض الأبحاث تشير إلى أن دمج تاريخ الرياضات في صف الرياضيات يساعد المعلمين والطلاب على الاجابة على بعض أسئلة "لماذا". مثلا قد يسأل الطلاب أسئلة حول أصول بعض الطرق الحسابية, رموز وكلمات نستعملها اليوم في صف الرياضيات. Rubenstein و .Schwartz (2000) يقولان بأن المصطلحات الرياضية يمكن أن ينظر إليها على أنها "متحجرات من سالف الزمان, واخراجها من أحافيرها يمكن أن يؤدي إلى اكتشاف بديع لكيفية تطور الرياضيات". هذا الاخراج من الأحافير يتم عبر التطرق إليها كجزء من أحداث رياضية انوجدت في الماضي وما زالت تضج حتى اليوم بالحياة الرياضية العارمة.هذا التشبيه ل– Rubenstein وSchwartz يصور تاريخ الرياضيات كعنصر رابط وجسر متين ما بين النشاط الرياضي الماضي والنشاط الرياضي الحالي. تشبيه آخر لما يحدث عندما نأتي بتاريخ الرياضيات إلى صف الرياضيات ليصبح جزء من تعلم الرياضيات وتعليمه هو تشبيه Davitt, (2000) للنظريات والافكار والاجراءات الرياضية الحالية بالجواهر المصقولة التي ابتدأت في الماضي كقطع خشنة من الكربون. تشبيه Davitt هذا يبرز الطبيعة التطورية للرياضيات. الطبيعة التطورية للرياضيات ستبرز عندما يطلع معلمو الرياضيات وطلابه على كيفية تغير لغة الرياضيات, من رموز ومصطلحات وطرق حسابية وصيغ تعبير وتمثيلات, عبر العصور.

هناك علاقة بين الصعوبة التي يجدها الطلاب في موضوع رياضي معين وبين الصعوبة التي قبل بها هذا الموضوع في المجتمع الرياضي (Kelly, 2000). لذلك الاطلاع على تاريخ الرياضيات ودمجه في التعليم يساعد المعلمين على فهم الصعوبات التي يجدها الطلاب في تعلم مواضيع معينة

في الرياضـيات مثـل الصـفر, الاعـداد السـالبة والعمليـات عليهـا, الاعـداد المركبـة, النهايـات والهندسات غير الاقليدية. معرفة المعلمين وتوقعهم لهذه الصعوبات كنتيجة لاطلاعهم على تاريخ الرياضيات يمكن أن يجعلهم يبحثون عن طرق بديلة لتعليم الموضوع الرياضي ومنهـا دمـج تـاريخ الرياضيات في التعليم وذكر الصعوبات التي وجدها علماء الرياضيات في تطـوير المفهـوم الرياضـي وفي قبوله, وبذلك لا يحس الطلاب ملامة إن وجدوا هم أنفسهم صعوبة بـه أو عـدم قبـول. ثقـة الطلاب بأنفسهم سـتزداد أيضـا عنـدما يعرفـون أن علمـاء الرياضـيات لم يجـدوا حلـول المسـائل الرياضية توا وإنما استغرق ذلك منهم وقتا وأحيانا وقتا طويلا جدا (Stander, 1989).

ما هو مهم أيضا بالنسبة لدمج تاريخ الرياضيات في دروس الرياضيات هـو أن الطـلاب سـيدركون أن وراء الاكتشافات الرياضية عملية منهكة من التجريب والخطأ. عندها سـيقدر الطـلاب تقـديرا متزايدا أهميـة الجهـد وقـوة العمـل الصـعب والتصـميم (Reimer & Reimer, 1995), كـذلك سيقدرون أهمية متابعة الاهداف في حقل الرياضيات (Shotsberger, 2000).

توصيات الاصلاح الحالي في التربيـة الرياضـية تضـم وجـوب تقـدير الطـلاب للعمـل في المسـائل الصعبة وأسئلة البحث ذات طابع التحدي بدل أن ييئسـوا لـدى أول عمـل مـع هـذا النـوع مـن المسائل نتيجة عدم تمكنهم من الحل السريع(NCTM, 2000), وتاريخ الرياضـيات يـوفر هنـا أمثلة عديدة على مسائل ونظريات لم يتم التوصـل إلى حلـول لهـا إلا بعـد عمـل مضـن وطويـل.

دمج تاريخ الرياضيات في التعليم يوفر أيضا فرصة جيدة للربط بين فروع رياضـية مختلفـة, فعنـد الحديث مثلا عن أقليدس أو الخوارزمي (ضمن درس رياضيات يحتوي على إسهام من إسهامات هاذين العالمين) يمكن للطالب أن يرى الارتباطات بين الحساب والجـبر والهندسـة. الـربط أيضـا يمكن أن يكون بين العلوم المختلفة مثل الرياضيات والجغرافيا والفلـك, إلخ. الجـدير بالـذكر أن هـذا يلائـم أيضـا توصـيات الاصـلاح الرياضـي الحـالي (NCTM, 2000) بـالربط بـين فـروع الرياضيات المختلفة وتوفير فرص بالصف يتعلم بها الطالب رياضيات حياتية.

التعليم الرياضي الذي تاريخ الرياضيات هو جزء منه يجعل الطلاب يدركون ويسـلمون بالمضـامين السياسية والحضارية والاقتصادية للتطورات الرياضية, كذلك الـدور المهـم الـذي لعبتـه الشـعوب المختلفة في تطوير الرياضيات (Barbin, 1991؛ Bidwell, 1993؛ Swetz, 1984).

لينغارد (2000) يشير إلى الانقطاع الحضاري وكذلك الغبن الحضاري اللذين يلحقان بنا جراء عدم ادخال بعض من تاريخ الرياضيات في منهاج الرياضيات, وهو يعطي مثالا على ذلك نظرية فيثاغورس: عندما نسأل طلابا ماذا تعني نظرية فيثاغورس بالنسبة لهم فانهم يجيبون "a تربيع زائد b تربيع يساوي c تربيع". لينغارد يعلق على ذلك متسائلا إن كان هؤلاء الطلاب يعرفون أن فيثاغورس الذي سميت النظرية على اسمه لن يجد مغزى في جوابهم ويقول بأن فيثاغوروس واليونانيون الأوائل اهتموا بالهندسة والاعداد (بشكل رئيسي الاعداد الصحيحة) ولم يهتموا أو اهتموا قليلا جدا بما نسميه اليوم بالجبر. هذا هو الانقطاع الحضاري الحادث في هذه الحالة. من ناحية أخرى عندما نتحدث عن نظرية فيثاغورس فاننا نعطي فقط فيثاغورس حقه, مع أن نظرية فيثاغورس عرفتها الشعوب القديمة قبل فيثاغورس مثل البابليين والمصريين. كثيرا ما يغبن الاسم أشخاصا معينين وحتى شعوبا وحضارات كاملة, فالحديث عن اسهام الشعوب والحضارات أو الأشخاص في الرياضيات عندما نعلم موضوعا ساهم بتطوره الاشخاص أو الشعوب يعطي هؤلاء الأشخاص أو الشعوب بعضا من حقهم, ناهيك عن أن هذا الحديث, كما هو مذكور في المصادر السابقة, يؤنسن موضوع الرياضيات الذي يحمل صبغة مجردة ولا انسانية ويجعله علما يعتمد تطوره على الظروف الخاصة بالحضارة التي تطور بها, وليس علما غير مرتبط بأي شيء خارجي كما يعتقد البعض. مثال نظرية فيثاغورس يتكرر كثيرا بالنسبة لمواضيع وظواهر رياضية كثيرة مثل مثلث باسكال الذي لم يأت به باسكال, الذي تحدث عنه حوالي سنة 1653, بل هو معروف قبله, فنحن نعرف أن عمر الخيام وعالما صينيا ليو- جو- هسيا اشتغلا به حوالي سنة 1100 ميلادية, وهناك من يقول بأن هذا مثلث كان معروفا لدى الهنود قبل ذلك بكثير.

يمكن تلخيص ما سبق من فوائد دمج تاريخ الرياضيات في دروس الرياضيات بالفوائد التالية:

- يساعد الطلاب على إعطاء معنى ومغزى للرياضيات.
- يقلل من خوف الطلاب من الرياضيات وتعلمه.
- يشجع على العمل الصعب وعلى عدم اليأس من حل مسائل ونظريات صعبة.
- يفسر أصول اللغة الرياضية.
- يساعد المعلمين على فهم أسباب عدم فهم الطلاب لمواضيع معينة بسرعة.

- يؤكد ويشدد على التطور المستمر للرياضيات.
- يخفف من الانقطاع والغبن الحضاريين الذين يلحقان بالشعوب والاشخاص الذين طوروا الرياضيات.
- يربي تقديرا للميراث متعدد الحضارات للرياضيات ولطبيعة الموضوع المتعلقة بالحضارة التي نشأ بها.
- حلبة نستطيع بها التوصل إلى معرفة أفضل للمركبات العاطفية المتعلقة بتطور الرياضيات.
- الاحتفال بالاختلاف الحضاري.
- تطوير وتكثيف نظرة انسانية للعالم.
- يربط الرياضيات مع بعضه البعض عبر الأزمنة المختلفة.
- يربط ما بين الفروع المختلفة للرياضيات.
- يربط ما بين الرياضيات وعلوم أخرى.

مشاكل في دمج تاريخ الرياضيات في تعليم الرياضيات:

- نقص في معرفة معلمي الرياضيات بالنسبة لكيفية ادخال ودمج تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات: بالرغم من كثرة المصادر التي تتحدث عن أهمية ادخال تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات ودمج هذا التاريخ في صف الرياضيات, إلا أن المصادر التي تري وتعطي أمثلة على كيفية الدمج ما زالت قليلة وغير معروفة من قبل معلمي الرياضيات.
- وجهة نظر المعلمين بالنسبة لطبيعة الرياضيات: وجهة نظر معلمي الرياضيات بالنسبة لطبيعة الرياضيات وتعليم وتعلم الرياضيات يؤثر على رغبة هؤلاء المعلمين في دمج تاريخ الرياضيات في تعليم الرياضيات. إذا نظر هؤلاء المعلمون إلى الرياضيات على أنها جسم معرفي ثابت ومنته , وإذا نظر إلى تعليم الرياضيات كنقل هذا الجسم من المعرفة من المعلمين إلى الطلاب, عندها لا يكون هناك فسحة أو مجال لتاريخ الرياضيات في عملية تعليم وتعلم الرياضيات (Rose, 2001), بينما "إذا نظر إلى الرياضيات كواحد

من أشكال متعددة من المعرفة, أو حتى كتعبير ومظهر حضاري أو كنشاط انساني, عندها تاريخ هذا الموضوع سيكون له معنى وتعلم هذا التاريخ سيصبح وسيلة لمعرفة أفضل للعلاقات بين الجنس البشري والمعرفة الرياضية, ضمن إطار حضاري معين" (Silva&Araujo, 2001, كما جاء في Rose, 2001).

- كيفية تعامل الكتب الدراسية مع تاريخ الرياضيات: معظم كتب الرياضيات الدراسية لا تحوي شيئا من تاريخ الرياضيات وان حوت فيكون ذلك ضمن ذكر بعض الحقائق التاريخية في آخر الفصل كملحق. هذا الذكر لتاريخ الرياضيات (إن كان) يجعل معلمي الرياضيات ينظرون إلى تاريخ الرياضيات على أنه منفصل عن تعليم ومنهاج الرياضيات وغريب عن النشاط اليومي المتعلق بالتربية الرياضية.
- كيفية ادخال تاريخ الرياضيات إلى صف الرياضيات: إذا كان ادخال تاريخ الرياضيات إلى درس الرياضيات هو عبارة فقط عن عرض هذا التاريخ بدون دمجه في التعليم فالنتيجة قد تكون أن الطلاب سيفقدون اهتمامهم بهذا التاريخ معتبرين أن التعليم الحقيقي سيأتي بعد ذكر اللمحة عن تاريخ الرياضيات المتعلقة بموضوع التعلم (Thomaidis, 1991).
- عندما نتحدث عن الوقت الطويل الذي استغرقه حل بعض المسائل الصعبة أو برهان بعض النظريات الرياضية فقد يقول بعض الطلاب لانفسهم: إن كان حل المسائل الصعبة استغرق كل هذا الوقت من قبل علماء الرياضيات فهل لدينا نحن أمل بحل مثل هذه المسائل؟ يجب أن نلفت انتباههم إلى أن حل هذه المسائل وفر لنا طرقا لحل مسائل شبيهة بها ومسائل معتمدة عليها وهو المطلوب منا بشكل عام في المرحلة المدرسية.
- بعض المعلمين يعتقدون أن تاريخ الرياضيات هو ليس رياضيات وأنهم ليسوا معلمي تاريخ وانما رياضيات. بالحقيقة هذا الادعاء صحيح إذا أرفقنا التاريخ كملحق وليس كدمج. الدمج يحول التاريخ إلى رياضيات.

- بعض المعلمين يعتقدون أن تاريخ الرياضيات هو مضيعة لوقت هم بحاجة إليه لتغطية المنهاج المطلوب, وهو ادعاء صحيح أيضا إن أرفقنا تاريخ الرياضيات في بداية أو نهاية الدرس ولم ندمجه دمجا جيدا بدرس الرياضيات.

بالنسبة للنقطة الأولى التي ذكرناها بأن معظم معلمي اriاضيات لا يعرفون كيف يدمجون تاريخ الرياضيات في دروس الرياضيات, يبدو أن معظم معلمي الرياضيات ليس فقط لا يعرفون كيف يدمجون التاريخ في دروس الرياضيات بل أحيانا لا يعرفون كيف يجيبون على أسئلة "كيف" المتعلقة بتاريخ الرياضيات, مع أنهم كثيرا ما يعرفون كيف يجيبون على أسئلة "متى". الركابي وآخرون (1987) يوردون نتائج بعض الفحوصات البسيطة التي أجروها على معلمي مدارس اعدادية اشتركوا في دورات دراسة صيفية. أحد الاسئلة الذي سألوه لستة وخمسين معلما من المشتركين بالدورات هو:

متى, حسب رأيكم, كانت المرة الأولى التي ظهر بها مفهوم غير النسبية؟

أ) في الفترة القديمة (بابليون, اغريق, إلخ).

ب) في فترة العصور الوسطى الأولى (هنود, عرب).

ت) بين 1300-1600 (أوروبيون).

ث) بين 1600-1800 (أوروبيون),

ج) بين 1800-1900 (أوروبيون)

حوالي 70% من المعلمين أجابوا جوابا صحيحا وهو (أ). بينما عندما طلب من المعلمين أن يرتبوا ترتيبا زمنيا ظهور المفاهيم: أعداد سالبة, كسور عشرية وغير نسبية, حوالي 55% من المعلمين أشاروا إلى أن مفهوم الكسور العشرية سبق ظهوره ظهور مفهوم غير النسبية (10% آخرون لم يجيبوا بتاتا). هذا الوضع, يقول الركابي ورفاقه (1987) يستدعي بناء مساقات تهتم بتاريخ الرياضيات ودمجه في التعليم. وما يؤكد ما يقوله الركابي ورفاقه أن عدم المعرفة التي يذكرونها لا تنحصر بالمفاهيم التي تحدثوا عنها وانما هي صحيحة أيضا بالنسبة لمفاهيم مختلفة أخرى تنتشر عبر كل مراحل التعليم ووفق كل مناهجه.

توجهات نحو دمج تاريخ الرياضيات في دروس الرياضيات:

الركابي وآخرون (1982, 1987) يصفون القضايا التي يجب أن ننتبه إليها عندما ندمج تاريخ الرياضيات في درس الرياضيات:

أ) وثاقة الصلة بالموضوع (relevance): المواد التي سيدرس تاريخها يجب أن تكون وثيقة الصلة بالمنهاج الذي سيعلمه المعلم, ومعالجة المادة تصمم حسب حاجات كل معلم.

ب) مصادر أولية (primary sources): المواد التي ستعلم هي مصادر تاريخية اولية ونصوص تاريخية.

ت) تعلم فعال: الطالب يتعلم المواد وحده بمساعدة أسئلة ومسائل يعدها المعلم لكل مصدر تاريخي.

ث) تاريخ مفاهيمي: التاريخ يجب أن يكون له علاقة بكيفية تطور مفهوم معين, كيف توجه رياضيون مختلفون للمفهوم عبر العصور, الصعوبات التي مروا بها, الابداع الذي أبدعوه, حتى الوصول إلى المرحلة الرسمية.

ج) التاريخ يجب أن يحتوي على جرعات بسيطة من الحقائق, التواريخ, السير الذاتية, والطرائف.

تاريخ الرياضيات ودمجه في التعليم والتعلم:

تزاناكيس وركابي (2000) يميزان بين ثلاثة أنواع من معالجة تاريخ الرياضيات:

- معالجة مصادر أولية أو أساسية وهذا يحدث عندما نعالج مقتطفات من من النصوص الرياضية الأصلية.
- معالجة مصادر ثانوية وهذا يكون عندما نعالج أحداثا تاريخية أو تفسيرات أو تكوينات جديدة للمصادر الأولية.
- معالجة مصادر تربوية وهذا يكون عندما نعالج مصادر بنيت من المصادر الأساسية أو الثانوية عندما المهم هو التوجه التعليمي.

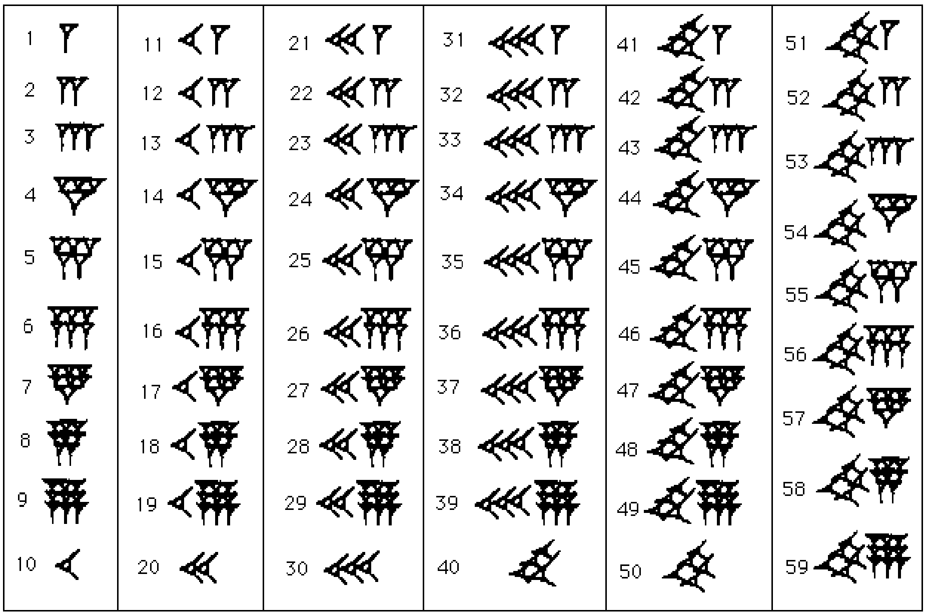
النوع الأخير هو النوع الأكثر ندرة بالنسبة لتاريخ الرياضيات وهو ما ينبغي أن ينصب اهتمام الباحثين والمربين عليه ليستطيع معلمو الرياضيات دمج تاريخ الرياضيات في تعليمهم دون أن يكلفهم هذا جهدا جهيدا.

متى نستعمل تاريخ الرياضيات في دروس الرياضيات العادية؟

- في بداية تدريس كل موضوع جديد. وهناك طريقتان لاستعمال التاريخ:
  (أ) ذكر ما كان كما كان.
  (ب) تقديم التاريخ عبر فعاليات رياضية تحاول أن تستعيد ما كان عبر جعل الطلاب يقومون بالفعاليات الرياضية التي قام بها الرياضيون من خلال توجيهات عامة أو محددة.
- من خلال يوم رياضيات: يمكن أن يكون يوم الرياضيات كله أو جزء منه عن عالم رياضي مثل الخوارزمي أو موضوع رياضي مثل الارقام العربية.
- من خلال اسبوع فعاليات. كما هناك اسبوع للنظافة, اسبوع للصحة, إلخ. يمكن أن يكون هناك اسبوع لتاريخ موضوع معين في الرياضيات مثل "طرق كتابة الاعداد" أو لتاريخ رياضيات فترة تاريخية محددة, مثل "الرياضيات البابلية".
- من خلال ملاحظة خلال درس تنتج من بروز حاجة لتبيان حقيقة أو فكرة معينة. مثلا حين نريد أن نشير أن ألغوريثم الضرب العمودي ليس مقدسا نعطي مثالا على ذلك كيف كان المصريون القدماء يضربون.
- في زاوية الرياضيات في الصف نضع كل أسبوع أو شهر معلومة عن رياضي أو موضوع رياضي تاريخي أو اكتشاف رياضي جديد.

  مثال على ذلك:

هل تعلم أن البابليين استعملوا رمزين فقط لكتابة أعدادهم:  ويرمز للواحد و  ويرمز للعشرة. مثال على كتابتهم هو:



مثال آخر:

بعض التواريخ الهامة في الاكتشافات الرياضية:

حوالي 3000 سنة قبل الميلاد:

البابليون يبدؤون استعمال نظام عددي ستيني لتسجيل عملياتهم المالية, وهو نظام عددي حافظ للمنزلة ولكن بدون صفر.

بعض الاقتراحات لدمج تاريخ الرياضيات في دروس الرياضيات في المدرسة البتدائية:

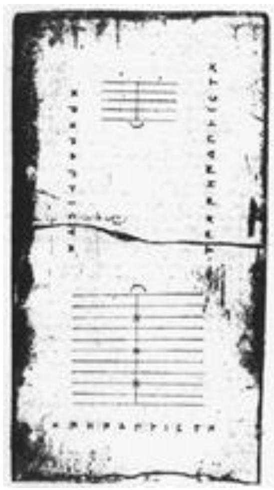
التعليم عن الزمن:

عندما نتحدث عن تقسيم الزمن نذكر أن البابليين هم من أول من قسموا اليوم إلى 24 ساعة, والساعة إلى 60 دقيقة, والدقيقة إلى 60 ثانية. يمكننا أيضا أن نذكر أن المصريين هم من أول قسموا السنة إلى 12 شهرا, في كل شهر 30 يوما, وخمسة أيام أعياد وذلك في سنة 4241 قبل الميلاد.

العداد:

العداد, هو الوسيلة التكنولوجية الاولى التي استعملها القدماء للحساب. الموسوعة البريطانية ترجع كلمة "أباكوس" الانجليزية للعداد للكلمة الفينيقية "أباك" وتعني الرمل, بينما يرجعها قاموس الأميريكان هريتيج إلى الكلمة اليونانية "أباكس", والتي من الممكن أن ترجع إلى الكلمة العبرية "أفاك" والتي تعني الغبار (Bogomolny, 2003). أصل الكلمة الرملي أو الغباري هو بسبب استعمال القدماء سطحا مستويا مغطى بطبقة من الرمل للكتابة والعد. ويقال بأن أرخميدس كان متركزا بأشكال هندسية مرسومة على الرمل عندما ذبحه جندي روماني (Bogomolny, 2003), وهناك قصة أخرى تروي أن أرخميدس داقع عن جزيرة سيراقوسة وحده بواسطة تسليط ضوء الشمس على سفنهم ثم قلبها بواسطة رافعات, وعندما تمكن الجنود الرومان أخيرا من دخول الجزيرة صاح أرخميدس بهم: لا تعيثوا فسادا بدوائري, وهي دوائر كان قد رسمها على الرمل, فقتلوه.

إذا أقدم عداد هو عداد رملي, وبعدها استعمل عداد الحصى الملساء. أقدم عداد باق حتى الآن هو عداد استعمله البابليون حوالي سنة 300 قبل الميلاد, والذي وجد في جزيرة سلاميس سنة 1846:



صحيح أن أقدم عداد موجود يرجع إلى سنة 300 قبل الميلاد ولكن هناك من يشير إلى أن البابليين استعملوا عدادات حوالي سنة 3000 قبل الميلاد (Miller, 2003).

هناك *مصادر الكترونية* يمكن أن نستعملها في صف الرياضيات لتنفيذ فعاليات رياضية تتعلق بالعداد, مثل البرنامج الموجود بالنص Abacus in Various Number Systems بالموقع http://www.cut-the-knot.org/blue/Abacus.shtml .

نظرية فيثاغورس:

عرف البابليون والمصريون نظرية فيثاغورس قبل اليونايين. ما يميز اليونانيين أنهم برهنوا هذه النظرية. في هذه الحالة يمكن اطلاع الطلاب على ما ورد في أحد الالواح التي بقيت من العصر البابلي:

4 هو الطول و5 هو القطر. ما هو العرض؟
كبره ليس معروفا.
4 مرات 4 هي 16.
5 مرات 5 هي 25.
خذ 16 من 25 فيبقى هناك 9.
كم مرة ماذا يجب أن آخذ لأحصل على 9؟
3 مرات 3 هي 9.
3 هو العرض.

مهم هنا أيضا أن يعرف الطلاب أن اليونانيين ومن سبقوهم من شعوب عرفت نظرية فيثاغورس اهتموا بالأساس بالجانب الهندسي للنظرية وتطبيقاتها العملية: النظرية العكسية لنظرية فيثاغورس تستعمل في البناء دائما, حيث يستعمل المثلث 3–4–5 لبناء زاوية قائمة الزاوية. هي أيضا تستعمل لايجاد مسافات.

جذور الأعداد:

امتلك البابليون طريقة بسيطة لحساب الجذر التربيعي. لايجاد الجذر التربيعي للعدد الصحيح N, نفرض أن k هو عدد يحقق: k^2 أصغر من N. إذا كان k أصغر بقليل جدا من N فإن N/k

أكبر بقليل جدا من جذر N. ولذلك المتوسط الحسابي لهـذين العـددين يعطينـا عـددا أقـرب إلى الجذر التربيعي المطلوب:

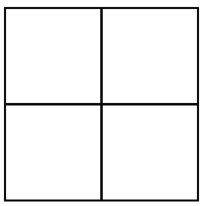
$$k_{(\text{الجيد})} = \frac{k + N/k}{2}$$

إذا بقينا نحسب بهذه الطريقة فان قيم k ستقترب بسرعة لجذر N. هذه الطريقة أحيانا ترجع إلى هيرون الاسكندراني اليوناني, لأنه وصفها في كتابـه "Metrica", ولكنـه مؤكـد أن البـابليين عرفوها قبل ذلك بكثير.

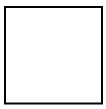
المصريون عرفوا الجذر التربيعي للعدد 2 كنسبة ثابتة بين قطر المربع وضلعه, أي أنهم توصلوا إلى جذر العدد 2 وهم يبحثون عن النسبة بين قطر المربع وضلعه, مثلما توصلوا إلى باي وهم يبحثـون عن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها. وبسبب أهمية جـذر 2 كـان عنـد المصـريين وحـدة طـول تساويه اسمها "ريمن المضاعف" وعرفوها بأنها طـول قطـر مربـع ضـلعه يسـاوي كوبيـت مقـدس واحد.

Cooper (1999) يقترح طريقة هندسـية لايجـاد الجـذر التربيعـي يمكـن أن يكـون المصـريون عملوا حسبها وعرفوها لانها تعتمد على تقسيمات متكررة لمربعات:

لنفرض أننا نريد إيجاد الجذر التربيعي للعدد 5. المربع ذو أكبر مساحة ولكن ليس أكـبر مـن 5 وحدات مربعة هو المربع ذو الطول 2:

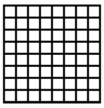


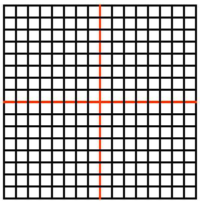
يبقى من المساحة الأصلية مربع وحدة واحد:



كيف يمكن الآن أن نضيف مساحة مربع الوحدة المتبقي للمربع الـذي يحتـوي علـى 4 وحـدات مربعة (4 مربعات وحدة)؟

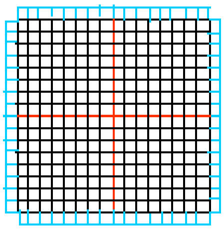
إحدى الطرق لفعل ذلك هي تقسيم مربع الوحدات الأربع ومربع الوحدة إلى أقسام صغيرة بحيث يمكن إضافة أقسام مربع الوحدة الصغيرة لمربع الوحدات الأربع. في الشكل التالي قسم كل مربع وحدة إلى 64 مربعا صغيرا وذلك بواسطة قسمة كل مربع وحدة إلى 8 أقسام على طول كل ضلع من أضلاعه.





عدد الأقسام الصغيرة في مربع الوحدة المتبقي هو 64 قسما, بينما عدد الأقسام في مربع الوحدات الأربعة هو 4x64=256 قسما. إذا تخيلنا ماذا كان يصنع المصريون (يقول Cooper) فإننا نتوصل إلى أنهم كانوا يقسمون كل مربع وحدة ليس إلى 8x8 أقساما صغيرة وإنما إلى 64x64 قسما صغيرا. أي أن مربع الوحدة المتبقي يحتوي على 4096 مربعا صغيرا والمربع ذو الوحدات الأربع يحتوي على 4x4096=16384 مربعا صغيرا.

بالإضافة إلى ذلك نلاحظ أن عدد المربعات الصغيرة على محيط مربع الوحدات الأربع هو 128+ 128+ 126+ 126= 508 وليس كما يمكن أن يتوقع 4x128=512, وذلك لأننا لا نعد المربعات الصغيرة على الزوايا مرتين. نريد الآن أن نضيف أقساما من مربع الوحدة المتبقي إلى لمربع الوحدات الأربع وذلك على طول المحيط. السؤال هو كم مربعا يجب أن نضيف حول مربع الأربع وحدات؟ إذا وضعنا 128 قسما على طول كل ضلع من أضلاع المربع ذي الأربع وحدات (كل ضلع من أضلاع مربع الأربع وحدات مكون من ضلعي مربع وحدة أي 64x2=128 قسما) فإننا نحتاج إلى 4 أقسام أخرى في الزوايا:



أي أن كل ما نحتاجه في الطبقة الأولى المضافة هو: 128x4+4=516 قسما. وعندها نحصل على مربع طول ضلعه 130 قسما صغيرا. في الطبقة الثانية المضافة نحتاج إلى 130x4+4=524 قسما. نستمر في إضافة طبقات قدر ما يسمح به المربع الصغير. في كل مرة يزيد طول ضلع المربع الذي نحصل عليه بقسمين عن المربع الذي قبله ولذلك في كل طبقة إضافية نزيد 8 أقسام أكثر مما زدنا في الطبقة التي قبلها. يمكن كتابة جدول بعدد المربعات المضافة في كل طبقة وبعدد الأقسام المضافة في كل الطبقات:

ترقيم الطبقة	عدد الأقسام المضافة في الطبقة	عدد الأقسام المضافة في كل الطبقات	عدد الأقسام الصغيرة التي تشكل كل ضلع من أضلاع المربع الناتج
1	516	516	130
2	524	1040	132
3	532	1572	134
4	540	2112	136
5	548	2660	138
6	556	3216	140
7	564	3780	142

ينتج أنه يمكن إضافة 7 طبقات بهذه الصورة, ويبقى: 4096-3780=316 قسما من مربع الوحدة لم تزد إلى المربع الناتج الذي طوله الآن 142 قسما صغيرا. الآن[1] من الأقسام المتبقية نأخذ 315 قسما ونقسم كل قسم إلى 3 أقسام طول كل واحد منها يساوي طول القسم الأصلي وعرضه يساوي ثلث القسم الأصلي, فيصبح عندنا 945 = 3 x 315 قسما مستطيلا, أما القسم المتبقي فنقسمه إلى 9 أقسام متساوية أي نحصل على 9x1=9 أقسام مربعة طول كل واحد منها هو ثلث طول القسم الأصلي. نضع حول المربع الذي نتج لدينا في المرحلة السابقة 142 قسما مستطيلا 1/3 x 1 على طول كل ضلع من أضلاعه ومربعا 1/9 x 1/9 في كل زاوية من زواياه. نكون قد استعملنا في هذه الطبقة 142x4=568 قسما مستطيلا و 4 مربعات, فيبقى لدينا 377 = 568 – 945 قسما 1/3 x 1 و 5 = 4 – 9 مربعات 1/9 x 1/9 .

1 لم يرق لي ما يقترحه كوبر من ناحية رياضية ولذلك كل ما يتبع هو اقتراحي أنا – الكاتب.

نكون حتى الآن قد وجدنا قيمة تقريبية لجذر العدد 5 وهي:

$$142/64 + (1/3)/64 = 2.2239583333$$ (تقريبا)

إن أردنا أن نحصل على جذر أكثر دقة للعدد 5 نقسم نوزع الاقسام المتبقية على المربع الكبير بطريقة شبيهة, ونستمر حتى نحصل على جذر يناسبنا.

النظام العشري:

طور النظام العشري الهنود. العرب عرفوا هذا النظام نتيجة التجارة المشتركة مع الهنود واستعملوه. العالم الغربي عرف هذا النظام نتيجة احتكاكه مع العرب في شمال افريقيا والاندلس. كتاب الحساب للخوارزمي هو أول كتاب باللغة العربية يفسر النظام العشري, وقد فسر بتفصيل كبير كيف تتغير قيمة الرقم عندما يتغير مكانه في العدد, كما فسر أهمية الصفر. بعض الشعوب القديمة استعملت نظاما يعطي قيما للمنازل قبل الهنود: البابليون استعملوا نظاما ستينيا, وشعب المايا استعمل نظاما عشرينيا. إذا ما الفرق بين الأنظمة العددية التي استعملته بعض الشعوب القديمة والنظام الذي طوره الهنود؟ الفرق يكمن في أمرين:

(1) عدم وجود رموز لمجموعة الأعداد الأساسية في أنظمة الاعداد الاخرى: مثلا شعب المايا الذي كان يستعمل نظام عد عشريني لم يكن عنده عشرون رمزا لتمثيل الأعداد وانما ثلاثة رموز فقط:  ويرمز للصفر,  ويمز للواحد,  ويمز للخمسة, أما البابليون فقد استعملوا رمزين فقط:  ويرمز للواحد و  ويرمز للعشرة.

(2) استعمال الصفر: البابليون وشعب المايا استعملوا رموزا تدل على الصفر كرمز فاصل وليس كرمز حافظ لمنزلة, بينما الصفر الذي استعمله الهنود كان حافظا للمنزلة مثله مثل باقي الأرقام. إعتبار الصفر رقما شبيها بباقي الارقام التسعة في الميزان العشري لم يكن واضحا منذ البداية للمطلعين على النظام العشري الهندي, فها هو فيبوناتشي, في القرن الثالث عشر, بعد فترة طويلة من استعمال الطريقة العشرية الهندية مع الصفر في الهند والعالم الاسلامي والصين — بدء من سنة 300 ميلادية, يكتب ليوناردو فيبوناتشي الإيطالي في كتابه "*Liber abbaci*":

هذه هي أشكال الهنود التسعة:

9 8 7 6 5 4 3 2 1

بهذه الأشكال التسعة, ومع الرمز 0, الذي يدعى بالعربية زفيروم, يمكن كتابة أي عدد كما سنظهر أدناه.

نستنتج أن فيبوناتشي الذي يعتبر معرف العالم الغربي الرسمي على نظام العد الهندي عربي لم ينظر إلى الصفر نظرته إلى باقي الأرقام.

الصفر: مفهومه ورمزه

البابليون استعملوا نظام عد ذا قيمة منزلية قبل حوالي 4000 سنة, حيث اعتمدوا على ميزان ال60, فمثلا عندما كتبوا 1,57,46,40 :

1,57,46,40 = 424000

كانوا يعنون به العدد الستيني $40x60^0 + 46x60^1 + 57x60^2 + 1x60^3$ والذي هـو بالكتابـة العشرية .424000. وبالرغم من هذه الكتابة المتقدمة لم يكن عندهم, في البداية, أي رمـز للصـفر, ولذلك هم لم يميزوا بين 17 و 107 و 1007 بالكتابة عن طريق الصفر وانما كانوا يميزون حسب اطار الكلام. ويبدو أن البابليين استعملوا رمزا ليعبر عن المكان الفارغ فقط بعد أكثر من ألف سـنة من استعمالهم نظام العـد ذي القيمـة المنزليـة, فمـثلا في لـوح يرجـع إلى سـنة 700 قبـل المـيلاد استعمل البابليون ثلاثة أعقفة للدلالة على المكان الفارغ. لوح آخر يرجع إلى نفس الفـترة تقريبـا استعمل عقافا واحدا للدلالة على المكان الفارغ, وهذا الاستعمال لم يكن في نهاية الارقام وانما فقط بين رقمين. هناك لوح يرجع إلى سنة 400 قبل الميلاد يظهر به اسفينان وُضعا ليدلا علـى مكـان

فارغ بين رقمين. أول من استعمل الرمز O ليدل على مكان فارغ هـو Ptolemy العـالم الرياضـي والفلكي اليوناني المصري حوالي سنة 130 بعد الميلاد. وبالرغم من ذلك فـان هـذا الرمـز لم يـدل على عدد عند Ptolemy أو الفلكيين اليونانيين الآخرين الذين استعملوا النظام الستيني البابلي.
لم يظهر الرمز 0 ليدل على عدد إلا في الرياضـيات الهندية حـوالي سـنة 876 ميلاديـة, حيـث يظهر على لوح حجري مكتوب عليه قصة زرع بستان أبعاده 187 و 270 هاسـتا والـذي يمكـن أن ينتج زهورا تمكن مـن تقـديم خمسـين اكليـل زهـر يوميـا لمعبـد محلـي. العـددان 270 و 50 مكتوبان بطريقة شبيهة جدا بما نكتبه اليوم ولكن الصفر أصغر وأكثر ارتفاعا (O'Connor and Robertson, 2000).
شعب آخر استعمل نظام عد ذا قيمة منزلية هو شعب المايـا الـذي عـاش في مركـز أمريكـا الـذين حوالي سنة 665 استعملوا نظام عد مع قيمة منزلية بميزان ال20.
اليوم معروف أن أول من استعمل النظام العشري والمحتوي على صفر هـم الهنـود وعـنهم ومـنهم أخذه العرب الذين طوروه ونشروه في كل العالم المعروف.

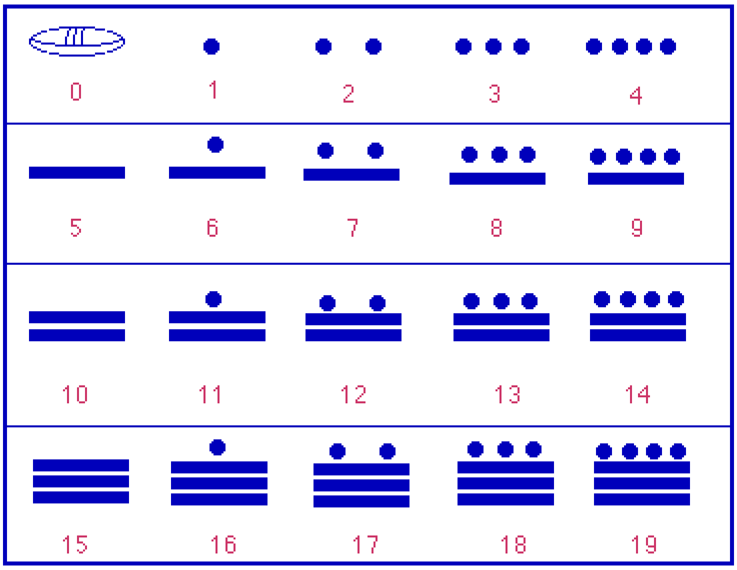
شكل كتابة النظام العشري

(من قال بأن النظام العشري أو أي نظام يهتم بقيمة المنازل يجب أن يكون أفقيا؟)

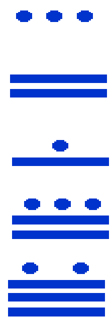
عن نظام الأعداد عند شعب المايا:

(بتصرف عن: Strom, 2003)

شعب المايا استعمل في نظام أعداده ثلاثة رموز فقط. أحدها يرمز للصفر وهـو  . رمـز آخـر يرمـز للواحـد وهـو  . الرمـز الثالـث يرمـز للخمسـة وهـو . القائمـة التاليـة (المأخوذة من Strom, 2003) تصف مجموعة الأعداد الأساسية الكاملـة الـتي اسـتعملها شـعب المايا:



لماذا انتهت القائمة الأساسية بـ– 19؟ السبب يرجع إلى أن شعب المايا استعمل نظام أعداد ميزانه 20. ما هو مثير أن نظامهم الذي كان به قيمة للمنازل سار حسب كتابة عمودية وليس أفقية كالنظام الذي نسير عليه اليوم. لننظر إلى القائمة التالية التي توضح كيفية إيجاد قيمة العدد.



هذا العدد يمكن كتابته بالصورة :

3

10

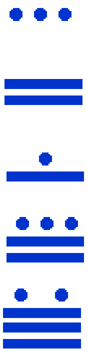
6

13

17

وبكتابتنا الأفقية: 3.10.6.13.17 (يجب أن لا ننسى أن هذا عدد مكتوب بميزان العشرين).

هذا العدد قيمته العشرية هي:

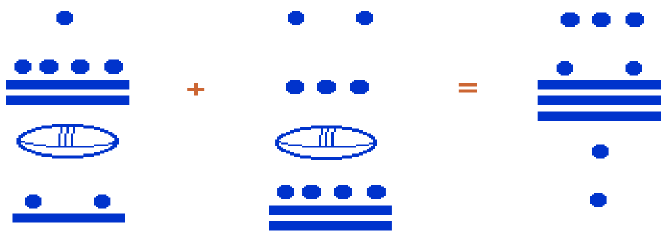


$(20)^4$	=	3 x 160,000	= 480,000
$(20)^3$	=	10 x 8,000	= 80,000
$(20)^2$	=	6 x 400	= 2,400
$(20)^1$	=	13 x 20	= 260
$(20)^0$	=	17 x 1	= 17
			562,677

حساب قيمة العدد 3.10.6.13.17, المكتوب بميزان العشرين, حسب الميزان العشري

الجمع حسب هذه الطريقة هين مثلما هو بالكتابة الافقية. لنر مثالا على ذلك:

تنفيذ جمع أكثر صعوبة هو بنفس الصورة مثل الكتابة الأفقية ولكننا هنا نتعامل مع ميزان العشرين وليس الميزان العشري:



الضرب والقسمة:

(الضرب والقسمة عند البابليين):

كان عند البابليين جداول حساب لمساعدتهم في حساباتهم. مثالان على ذلك هما لوحان وجدا في سنقرة على الفرات سنة 1854 يرجعان إلى سنة 2000 قبل الميلاد. هذان اللوحان يعطيان تربيعات الأعداد حتى 59 وتكعيبات الأعداد حتى 32. مستعملين لوح التربيعات والقانون $ab = [(a + b)^2 - a^2 - b^2]/2$ نفذ البابليون الضرب بصورة بسيطة نسبيا. البابليون استعملوا أيضا قانونا أبسط وهو $ab = [(a + b)^2 - (a - b)^2]/4$, ولذلك كل ما كان عليهم أن يفعلوه ليضربوا عددين هو إيجاد فرق مربعي مجموع العددين وفرقهما ثم أخذ ربع الفرق.

القسمة عند البابليين كانت أصعب, وقد أسسوا قسمتهم على الحقيقة أن القسمة هي الضرب بالمقلوب, أي:

$$a/b = a \times (1/b)$$

كان عند البابليين جدول يعطي مقلوب كل عدد, ولذلك حتى يقسموا كـانوا أولا يجـدون مقلـوب المقسوم عليه ثم يضربون المقسوم بمقلوب المقسوم عليه بنفس الطريقة التي وصفناها سابقا.
الجدول التالي هو جدول مقلوبات الإعداد الذي استعمله البابليون(لا تنسوا أنه مكتـوب بـالميزان الستيني):

2	0; 30
3	0; 20
4	0; 15
5	0; 12
6	0; 10
8	0; 7, 30
9	0; 6, 40
10	0; 6
12	0; 5
15	0; 4
16	0; 3, 45
18	0; 3, 20
20	0; 3
24	0; 2, 30
25	0; 2, 24
27	0; 2, 13, 20

لاحظوا أن هناك فراغات بالجدول, وذلك لان $^1/_{13}$, $^1/_{11}$, $^1/_7$, إلخ ليست كسـورا نهائيـة بميـزان الستين. هذا لا يعني أن البابليين لم يستطيعوا حساب $^1/_{13}$ مثلا. البابليون كتبوا $^1/_{13}$ بالصورة:

$$^1/_{13} = {}^7/_{91} = 7 \times ({}^1/_{91}) = 7 \times ({}^1/_{90}) \text{ (تقريبا)}$$

وقيمة $^1/_{90}$ كانت معروفة عندهم. وهناك ما يدل علـى أنهـم كـانوا واعـين للمشـكلة, لأن الكاتـب الذي يكتب الـنص, بعـد أن يعطـي تقريبـا لمقلـوب مثـل $^1/_7$ يكتـب: **"أعطـي تقريـب لان 7 لا ينقسم"**.

في الصف الخامس أو السادس يمكن تعليم الطلاب عن الضرب بالطرق البابلية. مثلا يمكن إعطاؤهم الفعالية التالية عن الضرب البابلي:

لننظر إلى الامثلة التالية التي تمثل كيف كان البابليون يضربون عددين معينين:

$$7x5 = (12^2-2^2)/4$$

$$12x9= (21^2-3^2)/4$$

$$25x20 = (45^2-5^2)/4$$

أ) هل يمكنكم أن تفسروا كيف ننفذ هذا الضرب؟

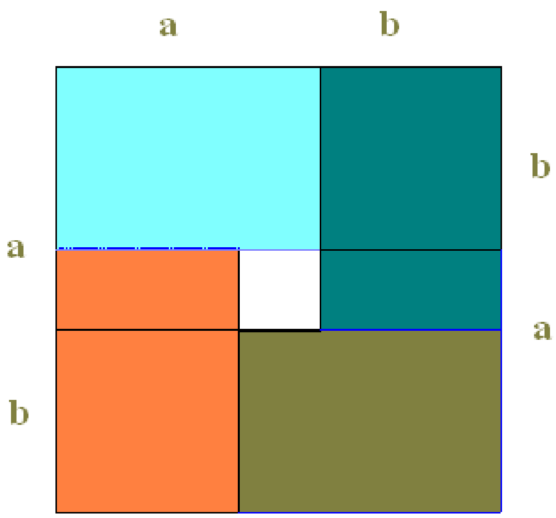
ب) تعالوا ننفذ بنفس الطريقة التمارين التالية:

ج) 20x15 =

د) 10x9 =

ه) 5x15 =

ج) الشكل التالي يفسر لماذا تعمل هذه الطريقة:



استعملوا الشكل لتفسروا لماذا تعمل هذه الطريقة. الإجابة على الأسئلة التالية تساعدكم:

- ماذا تمثل مساحة الشكل كله؟
- ماذا تمثل مساحة الشكل الأبيض؟
- ماذا تمثل مساحة كل من المستطيلات الملونة؟

الضرب والقسمة عند المصربين القدماء:

لنأخذ مثالا حاصل الضرب 52x67:

المصريون القدماء ضربوا بالطريقة التالية:

52 x 67

52	1
104	2
208	4
416	8
832	16
1664	32
3328	64

نختار الآن من العمود الايمن الاعداد 64 و 2 و 1 وعندها نحصل على:

$$67= 64+2+1$$

$$52 \times 67= 52 \times (64+2+1)$$

$$=3328 + 104 + 52$$

$$= 3484$$

لنأخذ الآن تمرين قسمة: 17 : 504

نبني أولا جدول ضرب:

17	1
34	2
68	4
136	8
272	16
544	32

والآن:

$$504 - 272 = 232$$
$$232 - 136 = 96$$
$$96 - 68 = 28$$
$$28 - 17 = 11$$

ولذلك:

$$504 = 16x17 + 8x17 + 4x17 + 1x17 + 11$$
$$= (16 + 8 + 4 + 1) x 17 + 11$$

ومن هنا:

$$504:17 = 29 + 11/17$$

بالطبع المصريون القدماء كتبوا الكسر 11/17 بواسطة كسور الوحدة.

طريقة أخرى للضرب عند المصريين القدماء:

(البعض يعتبر هذه الطريقة طريقة القرويين الروس)

الطريقة السابقة اعتمدت على التضعيف بينما هذه الطريقة تعتمد على تضعيف أحد العددين المضروبين وتنصيف العدد المضروب الآخر.

لنأخذ مثالا: 71x81

71x81
142x40
284x20
568x10
1136x5
2272x2
4544x1

نجمع الآن الاعداد في العمود الأيسر المضروبة بأعداد فردية في العمود الأيمن, أي نترك تلك المضروبة بأعداد زوجية في العمود الأيمن:

71x81

~~142x40~~

~~284x20~~

~~568x10~~

1136x5

~~2272x2~~

4544x1

وبذلك نحصل على:

71+1136+4544=5751

وهو حاصل ضرب 71 و 81 الذي يمكن الحصول عليه بأية طريقة أخرى.

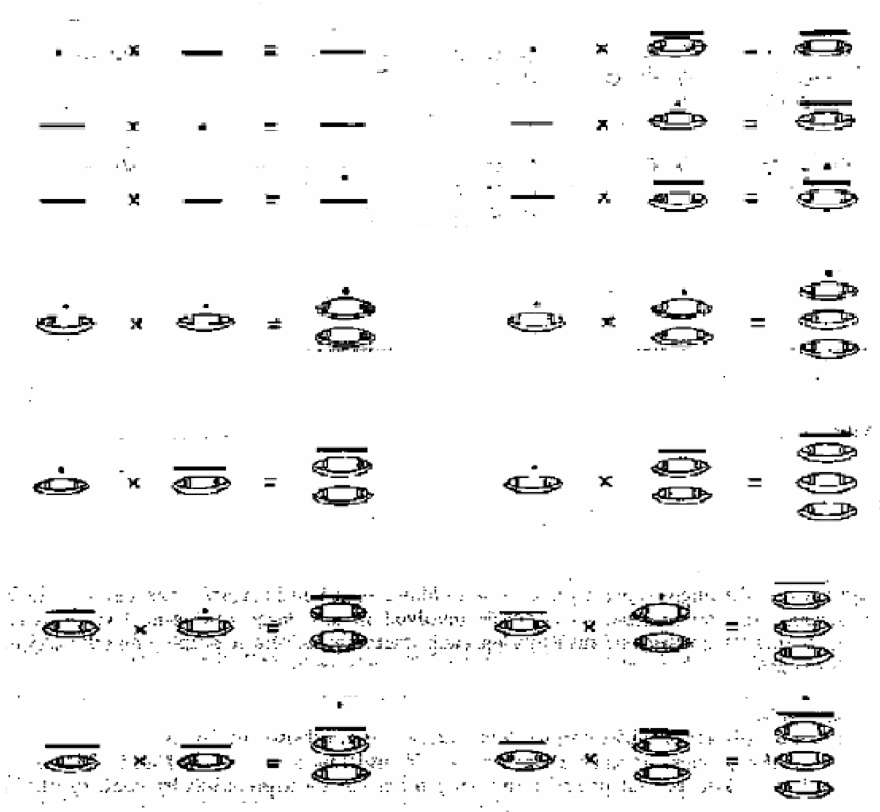
لماذا تعمل هذه الطريقة؟

نبقى السبب الرياضي لصحة هذه الطريقة للمدرسة الثانوية وهي تتعلق بالعمل في الميزان الثنائي.

مما سبق نستنتج أنه, حتى في أنظمة العد التي بها المنازل ذات قيمة, **هناك أكثر من طريقة للضرب والقسمة وأن ألغوريثم الضرب العمودي وألغوريثم القسمة العمودية غير مقدسين**.

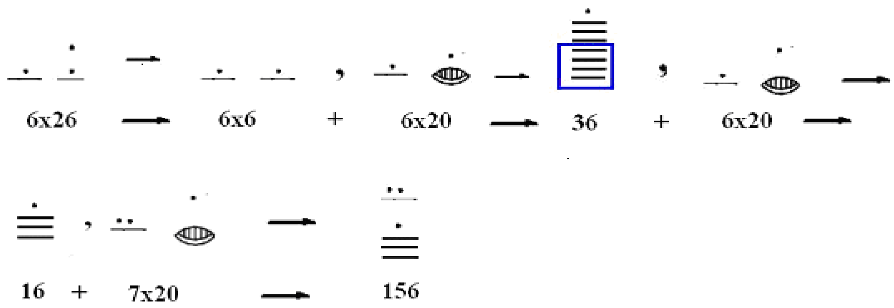
الضرب والقسمة عند شعب المايا:

شعب المايا, مثله مثل البابليين, استعمل قوائم ضرب. مثال على قائمة كهذه هو:



جدول ضرب مايي

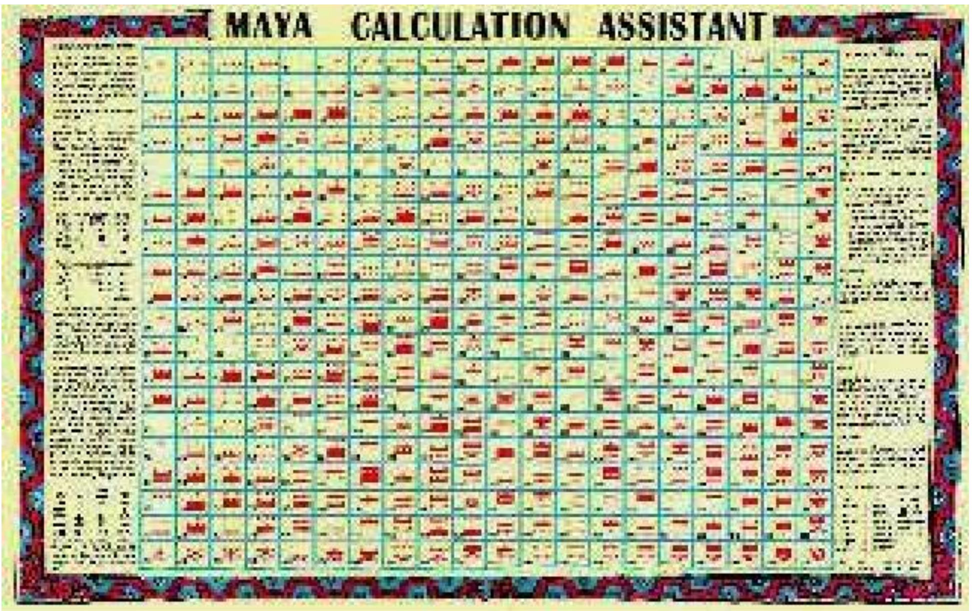
المايا ضربوا 6x26 بالطريقة التالية:



كيف ضرب المايا 6x26

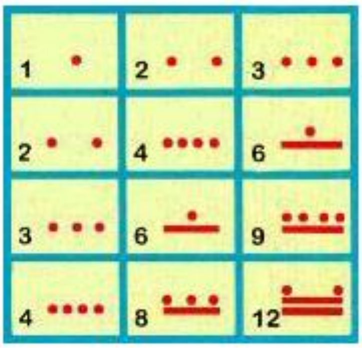
ملاحظة: هنا ممكن أن نسأل الطلاب عن سبب تنفيذ المايا الضرب بالطريقة المذكورة, والنقاش لا بد أن يتركز على قيم المنازل وعلى ميزان العشرين الذي استعمله المايا.

وقد استعمل المايا في فترة لاحقة جدولا عاما لمساعدتهم في الضرب والقسمة والتربيع:



مساعد الحساب المايي

من قريب الجدول يرى:



مساعد الحساب المايي - نظرة من قريب

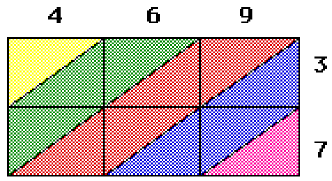
طريقة استعملها فيبوناتشي في كتابه "ليبر أباسي"

هل هي ذات أصول عربية؟

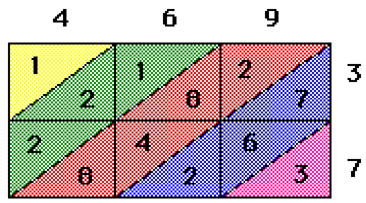
لنضرب 37 x 469:

(المثال مأخوذ من Smoller ، 2001).

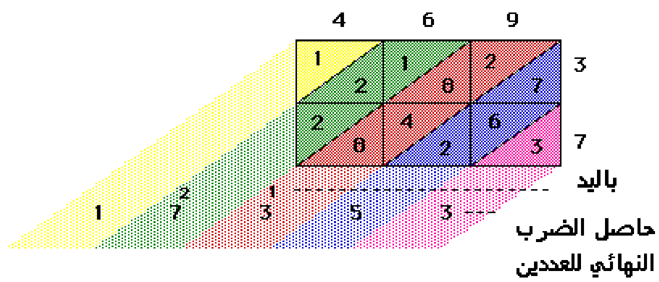
نضع العددين على ضلعي مستطيل:



بعدها نضرب كل رقم في العامل الأول بكل رقم في العامل الثاني ونضع حاصل الضرب على طرفي "قطر" ملائم:



في النهاية نجمع الأعداد بشكل قطري:



حاصل الضرب النهائي هو 17353.

الكسور:

المصريون استعملوا كسور الوحدة وهي كسور بسطها 1. كل كسور المصريين كانت كسور وحدة ما عدا كسرين: 2/3 و 3/4. بالنسبة للكسور الأخرى، المصريون كتبوها كمجموع كسور وحدة.

مثلا:

$$89/144 = 1/2+ 1/9 + 1/144$$

أمثلة أخرى على كسور مصرية أي كسور مكتوبة كمجموع كسور وحدة يمكن الحصول عليها بواسطة الأبلت "الكسور المصرية" في

http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/egypt.

كيف يمكن كتابة أي كسر كمجموع كسور وحدة بدون الاعتماد على برنامج حاسوب؟

فيبوناتشي, في كتابه "Liber Abaci " يقترح طريقة لصنع ذلك:

لنأخذ مثلا العدد 4/5. نبحث عن أكبر كسر وحدة ليس أكبر من 4/5. هذا الكسر هو 1/2 .

نطرح الكسر الذي وجدناه من الكسر الذي نريد فكه:

$$4/5 – 1/2 = 3/10$$

نقوم بنفس الخطوات مع الكسر الجديد أي 3/10:

أكبر كسر وحدة ليس أكبر من 3/10 هو 1/4.

$$3/10 – 1/4 = 1/20$$

ولذلك يمكن كتابة 4/5 كمجموع كسور وحدة بالطريقة التالية:

$$4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20$$

البابليون كتبوا كسورا شبيهة بالكسور العشرية اليوم ولكن كتابتهم لا تمكن من معرفة الجزء الكسري, وفقط يمكن أن نعرف الجزء الكسري من المضمون.

طريقة كتابتنا الحالية للكسور العادية مأخوذة من الهنود والعرب. الهنود كتبوا الكسور بنفس الطريقة التي نكتب بها اليوم ولكن بدون الخط الافقي بين البسط والمقام. الخط الافقي أضافه العرب (Miller, 2003).

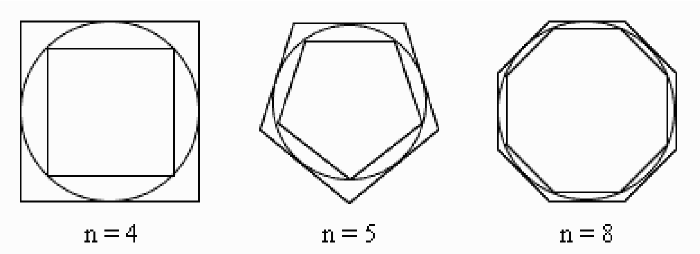
بالنسبة للكسورالعشرية، أول من كتب عن الكسور العشرية هو الاقليدسي (920-980). الحديث عن الكسور العشرية موجود في عمل كثير من الرياضيين من مدرسة الكرجي (1130-1180). الكاشي (1380-1429), في "رسالة المحيط", كتب أن قيمة باي هي:

صحاح
3 1415926535898732

فوق الرقم 3 توجد الكلمة "صحاح"، ولذلك القسم الأيمن هو عشري بالرغم من عدم وجود فاصلة أو نقطة عشرية. استعمال النقطة العشرية يرجع للرياضي Magini (1555-1617) أو Christoph Clavius (1537-1612).

باي (π): مساحة ومحيط الدائرة

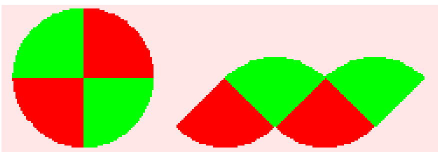
الميزوبوتاميون وجدوا قيمة تقريبية لباي وهي 3. البابليون وجدوا قيمة لباي وهي 3.125, أما المصريون القدماء فقد وجدوا قيمة جيدة لباي: 3.1667 = 1/6 3 وهذه القيمة هي أكثر بحوالي 0.8% من القيمة التى تعطينا إياها الألة الحاسبة وهي ...3.14159. هذه القيمة هي أفضل قيمة ما قبل العصر الهيليني (Aleff, 2003). وكلهم صنعوا ذلك عن طريق مقارنة محيط الدائرة بمحيط المسدس المحصور بها، فهم جعلوا محيط المضلع السداسي المنتظم المحصور بها حدا أسفل لها. أرخميدس من سيراقوسة وجد قيمة أفضل لباي وهي بين 10/71 3 وبين 3 1/7. هذه القيمة هي 0.024% أقل و0.040% أكثر من القيمة التي تعطينا إياها الآلة الحاسبة. الطريقة التي توصل بها أرخميدس إلى هذه النتيجة بسيطة: رأى أرخميدس أن محيط المضلع المنتظم المحدب المحصور في دائرة أصغر من محيط الدائرة، وأن محيط المضلع المنتظم المحدب الذي يحصر الدائرة أكبر من محيط الدائرة. ولقد رأى أيضا أن المضلعات ذات عدد أكبر من الأضلاع تعانق الدائرة بصورة أكبر من تلك التي لها عدد أقل من الأضلاع، ولذلك محيطها أقرب إلى محيط الدائرة. بدأ أرخميدس بمضلع سداسي لانه من السهل أن نقسمه إلى مثلثات متساوية الأضلاع يمكن حساب أضلاعها بسهولة. بهذه الطريقة توصل إلى قيمة لباي وهي 3. بعدها ضاعف عدد أضلاع المضلع وحسب من جديد أطوال المثلثات الناتجة. بقي يحسب حتى توصل إلى مضلع ذي 96 ضلعا وهو الذي أعطى النتيجة السابقة. الشكل التالي يوضح كيف أن محيط المضلع المنتظم المحصور والحاصر للدائرة يقترب من محيط الدائرة عندما يزداد عدد أضلاع المضلع المنتظم.

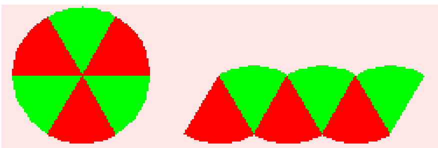


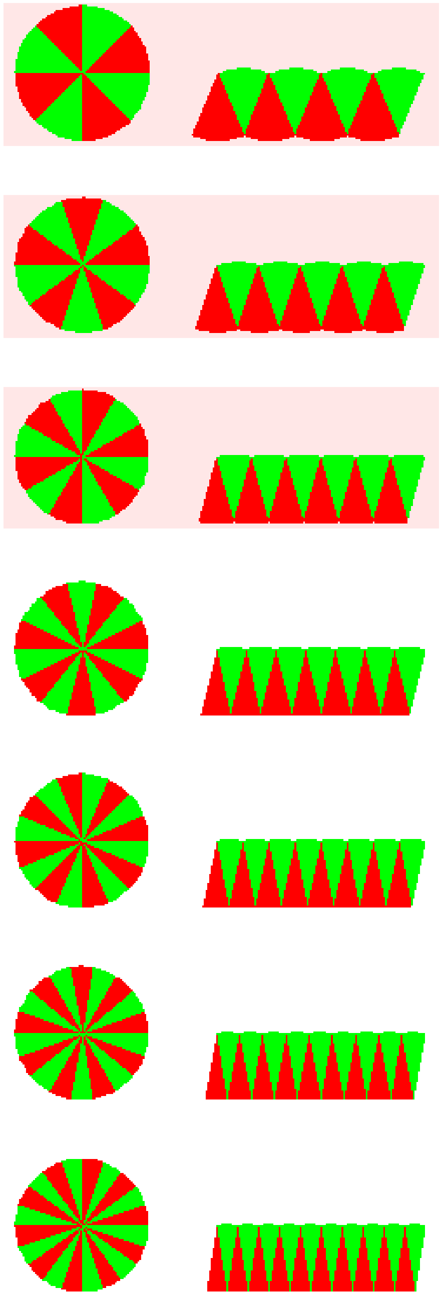
مـن النصـوص الالكترونيـة الـتي مـن المكـن أن تسـاعدنا في فهـم مـا فعلـه فيثـاغورس الـنص Archimedes and the Computation of Pi في الموقـــــع http://www.math.utah.edu/~alfeld/Archimedes/Archimedes.html التابع لجامعة أوتا. بالنص يوجد أبلت يظهر دائرة بها مضلع منتظم محصور ومضلع منتظم حاصـر. المسـتخدم هو الذي يقرر عدد أضلاع المضلع المنتظم المحصور بالـدائرة أو الحاصـر لهـا, ويمكنـه أن يراقـب كنتيجة للتغيير محيط المضلع المحصور ومحيط المضلع الحاصر وقيمة باي التقريبية الناتجة.

مساحة الدائرة:

الاغريق وجدوا مساحة الدائرة بطريقة بسيطة. قسموا الدائرة لعدد من القطاعات ورتبوا القطاعات ليحصلوا على ما يشبه المستطيل, وعندها حسبوا مساحة المستطيل. الشكل التالي يبين ما صنعوا, ونحن نرى أنه كلما زاد عدد القطاعات كلما اقتربنا من شكل المستطيل.







الأشكال مأخوذة من Beck & Trott (2003)

يمكن رؤية أن عرض المستطيل هو نصف قطر الدائرة r وأن طول المستطيل هو πr (نصف محيط الدائرة).

ومما يحسن الإشارة إليه أننا يمكن أن ندمج التاريخ مع التكنولوجيا في صف الرياضيات, فمثلا بالنسبة لما ذكرناه سابقا يمكننا استعمال برنامج حاسوب يقربنا مما فعل أرخميدس وسابقوه من البابليين والمصريين وغيرهم, فمثلا الموقع "تقريب مساحة دائرة وحدة لمساحة مضلع", الموجود في
http://math.furman.edu/~dcs/java/circle.html , يمكننا من العمل مع أبلت مخصص لمقارنة مساحة الدائرة مع مساحة مضلعات منتظمة مختلفة محصورة وحاصرة, ويري كيف أن مساحة المضلع المنتظم تقترب من مساحة الدائرة عندما يزداد عدد أضلاع المضلع المنتظم.

نظرية فيثاغورس:

أول من برهنها, حسب ما نعرف, فيثاغورس ولذلك هي معروفة به مع أنه لم يوجدها. برهنها برهانا بديلا ثابت بن قرة المولود سنة 826 ميلادية في حران والمتوفى سنة 901 في بغداد.

الأعداد غير النسبية:

أهم ما وجد الفيثاغوريون هو أن قطر المربع ليس مربعا نسبيا من ضلعه.

مثلث باسكال:

نذكر هنا أن هذا المثلث كان معروفا قبل باسكال (الذي ولد سنة 1623 ميلادية) بكثير. عرفه الهنود في القرن العاشر والمسلمون والصينيون في القرن الحادي عشر الميلادي. ظهر في كتابات الكرجي وعمر الخيام وتشو شي تشيا الصيني.

في كتاب "الفخري" للكرجي, المولود سنة 953 ميلادية, نجد استعمالات لمثلث باسكال ومنها حساب $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, و $(a+b)^4$.

معتمدين على كتاب الجبر الذي ألفه الخيام, المولود سنة 1048 ميلادية, يمكننا القول بان الخيام استعمل مثلث باسكال لايجاد جذور الأعداد. وللأسف الكتاب الذي يفصل فيه كيف حسب ذلك مفقود.

تشو شي تشيا الصيني, المولود سنة 1270 ميلادية, كتب كتاب "المرآة الغالية للعناصر الأربعة" ويعتبر قمة الرياضيات الصينية حتى ذلك الوقت, وبه اشتغل على مثلث باسكال الذي استخدم في الصين قبل ذلك الوقت.

عن باسكال يمكن أن نقص القصة التالية:

بليز باسكال كان الابن الثالث لإتيان باسكال وولده الوحيد. أم بليز ماتت وهو ابن 3 سنوات. في سنة 1632 أخذ إتيان باسكال أولاده الأربعة ومنهم بليز إلى باريس تاركين كليرمونت. أبو بليز كان يحمل آراء غير تقليدية وقرر أن يعلم ابنه بنفسه. قرر الأب أن بليز يجب أن لا يعرف الرياضيات قبل جيل 15 سنة وأخرج من البيت كل كتاب يتعلق بالرياضيات. كان لهذا تأثير عكسي إذ ابتدأ بليز يدرس الهندسة وحده في جيل 12 سنة واكتشف أن مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين. وعندما عرف أبوه بذلك لان وأحضر لبليز نسخة من أقليدس.

في جيل 14 سنة بدأ بليز يصطحب أباه لاجتماعات مرسين. كانت مرسين تتبع نظاما دينيا لجماعة المينيميين, حيث كانت الخلية في باريس مكانا يجتمع به رياضيون معروفون ومنهم ديزارغوس الذي أعجب به باسكال. وفي جيل 16 سنة قدم باسكال مقالا في أحد اجتماعات ميرسين احتوى على نظريات في الهندسة الانعكاسية.

سمي مثلث باسكال بهذا الاسم لان باسكال وجد صفات كثيرة له.

هنا أيضا يمكن الاستفادة من البرامج الحاسوبية الموجودة في الانترنت مثل البرنامج "اكتشاف النماذج" في http://mathforum.org/workshops/usi/pascal/mo.pascal.html الذي يري موقع الاعداد الطبيعية في مثلث باسكال, كذلك موقع الاعداد المثلثة, التيتراهيدرية وأعداد فيبوناتشي. برنامج آخر هو An applet for constructing Pascal's triangle mod n الموجود في http://faculty.salisbury.edu/~kmshanno/pascal/ANagel/applet1.html.

هذا الأبلت يحول مثلث باسكال كله إلى بواقي اعداد مثلث باسكال عند قسمتها على عدد تحدده أنت. برنامج ثالث هو الابلت "نماذج في مثلث باسكال" الموجود في http://www.countingstick.com/edu/free/blaise/blaise.html والذي يلون مثلث باسكال بلونين, واحد يدل على الاعداد بمثلث باسكال التي تنقسم على عدد تحدده أنت وواحد يدل على الأعداد التي لا تنقسم على ذلك العدد. أبلت آخر يمكن من صنع نفس الشيء هو

الأبلـــــــت "تلـــــــوين مضـــــــاعفات في مثلـــــــث باســـــــكال" الموجـــــــود في http://www.shodor.org/interactivate/activities/pascal1/index.html. الفـرق بـين الابلتين أن الأول يعين وحده المضاعفات بينما الثاني يمكن ويطلب من المستخدم أن يفعـل ذلـك وهو يزوده بتغذيـة استرجاعية عما قـام بـه وعمـا بقـي عليـه أن يفعـل, أي أن دور المستخدم (الانسان) يختلف في الابلتين.

نعطي الآن مثالا على درس بالهندسة يستعمل تاريخ الرياضيات:

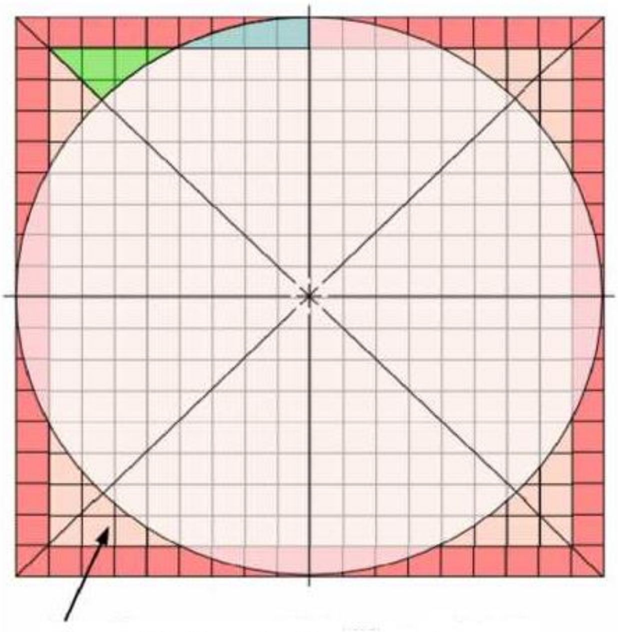
مساحة الدائرة:

فعالية معدّة:

مساحة الدائرة حسب المصريين:

للمعلم:

المصريون القدماء وجدوا مساحة الدائرة بواسطة رسمها على خلفية من مربعـات صـغيرة, كمـا هـو مبين أدناه:

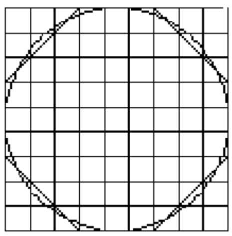


مساحة المربع الداخلي = (8/9 قطر الدائرة) ^ 2

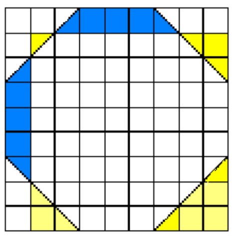
نرسمها بحيث أن الدائرة تمس المربع الخارجي بأربعة نقاط على الأضلاع الأربعة. كما هو واضح, مساحة المربع الخارجي أكبر من مساحة الدائرة. لننظر إلى المربع الداخلى ذي الخانات ذات اللون الزهري. بعض أجزاء الدائرة غير موجودة في المربع الداخلي مثل القسم الملون باللون الأزرق أعلاه, بينما هناك أجزاء في المربع الداخلي غير موجودة في الدائرة مثل ذلك الملون باللون الأخضر.

إذا كان مساحة الجزء الأخضر تساوي مساحة الجزء الأزرق, عندها مساحة الدائرة تساوي مساحة المربع الداخلي. نتيجة تجريب وجد المصريون أن هذا يحدث عندما طول المربع الداخلي يساوي 8/9 طول المربع الخارجي. وعندها مساحة المربع الداخلي يساوي $(8/9d)^2$, حيث d هو طول المربع الخارجي, أي أن مساحة الدائرة (وهي تساوي مساحة المربع الداخلي) تساوي $(8/9d)^2$. طول المربع الخارجي يساوي قطر الدائرة أي أن $d=2r$ حيث r هو نصف قطر الدائرة. ولذلك مساحة الدائرة هي $(16/9r)^2$ أي $(256/81)r^2$. هنا نحصل على قيمة لباي قريبة من قيمة باي التي نعرفها اليوم.

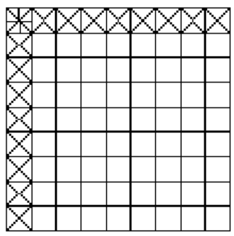
إمكانية أخرى للنظر إلى ما فعله المصريون لايجاد مساحة الدائرة تظهر في الشكل التالي:



شكل (1)



شكل (2)



شكل (3)

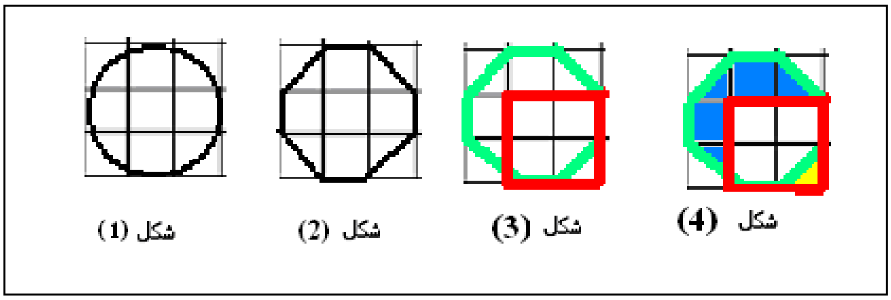
لنسمي المربع الحاصر للدائرة "مربع الدائرة". مساحة الدائرة في شكل (1) تساوي مساحة المضلع المحاذي لها في نفس الشكل. لنسم هذا المضلع "مضلع الدائرة". في شكل (2) رسم مضلع الدائرة الملائم للدائرة في شكل (1) ولون بالازرق ما هو زائد منه عن المربع ذي الزوايا الصفراء ولون بالاصفر ما هو زائد من المربع نفسه عن مضلع الدائرة. مساحة الاجزاء الزرقاء تساوي تقريبا

مساحة الأجزاء الصفراء عندما يكون طول مربع الـدائرة 9 وحـدات, وعنـدها مسـاحة المربـع ذي الزوايا الصفراء, لنسمه المضلع الكافئ للدائرة", نساوي مساحة الدائرة. وينتج أن مساحة الـدائرة تساوي $(8/9 \times d)^2$ حيث d طول ضلع مربع الدائرة أو طول قطر الدائرة. من هنا مساحة الدائرة تساوي $(8/9 \times 2r)^2$ حيث r هو نصف قطر الدائرة أي $(256/81)r^2$.

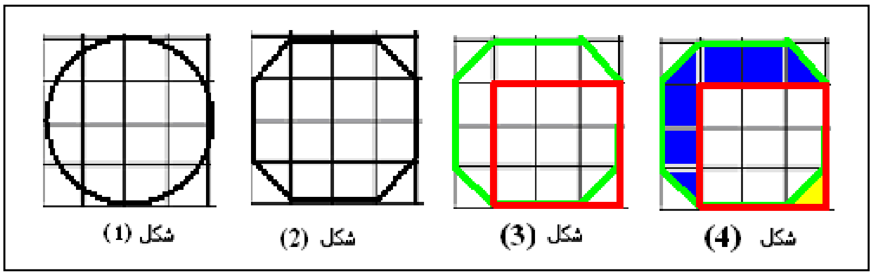
<u>**للطالب**</u>:

أنظروا إلى الرسمين التاليين وحاولوا أن تفهموا ماذا حدث:

الرسم الأول:



الرسم الثاني:



أسئلة موجهة:

(أ) ماذا يوجد في شكل (1) من كل رسم؟

(ب) ماذا يوجد في شكل (2) من كل رسم؟

(ت) ما هي العلاقة بين الاشكال الهندسية في الشكلين (1) و (2)؟

(ث) ماذا أضيف في شكل (3)؟

(ج) ماذا لون في شكل (4)؟

إرشاد لقسم (ج): شكل (4) يقارن بين مساحتي الشكلين الهندسيين الموجودين في شكل (3).

(ح) على ورقة تربيعات أرسم دائرة قطرها 5 وحدات تنحصر في مربع طوله 4 وحدات وجد مساحتها عن طريق تحويلها إلى مضلع ومقارنة مساحة المضلع الناتج بمساحة مربع طوله أصغر من المربع الحاصر بوحدة واحدة. إصنع نفس الشيء بالنسبة لدائرة قطرها 6, 7, 8, 9, 10 وحدات.

(خ) متى ساعدكم رسم المربع الصغير (الذي طوله أصغر من طول المربع الحاصر بوحدة واحدة؟) في إيجاد مساحة الدائرة؟

العمل مع برنامج حاسوبي:

أحد البرامج الذي يعالج مساحة الدائرة ضمن التوجه المصري الذي ذكرناه سابقا موجود في http://mathforum.org/isaac/problems/pi3.html وجيد أن يطلع عليه الطالب في مرحلة من مراحل تعرفه على كيفية إيجاد المصريين لمساحة الدائرة.

مساحة الدائرة حسب أرخميدس:

<u>للمعلم:</u>

طريقة أرخميدس لحساب قيمة باي تستعمل نفس الفكرة التي استعملها البابليون, ولكن أرخميدس استعمل طريقة التقريبات المتتالية وأكد أن باي يمكن أن تتوجد بكل درجة دقة نريدها. آخذا أية دائرة أرخميدس رسم لها مسدسا حاصرا ومسدسا محصورا. بعدها, وباستعمال التقسيمات المتتالية, رسم مضلعات منتظمة أخرى بالدائرة وحولها, ذات عدد أضلاع: 12, 24, 48 وأخيرا 96. المضلعات المنتظمة المرسومة حول الدائرة شكلت حدودا عليا تتقارب, بينما المضلعات المنتظمة المحصورة شكلت حدودا دنيا تتقارب أيضا. بايجاد مساحة هذه المضلعات وجد أرخميدس, الذي عاش في القرن الثالث قبل الميلاد, قيمة لباي وهي: 3 10/70 < □ < 3 1/7.

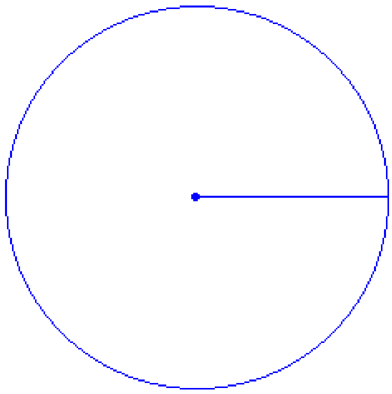
هذه الطريقة الموصوفة بالكلمات يصفها البرنامج الحاسوبي "تقريب لمساحة دائرة الوحدة" في http://math.usask.ca/maclean/CircleArea/PCircleArea.html.

<u>للطالب</u>:

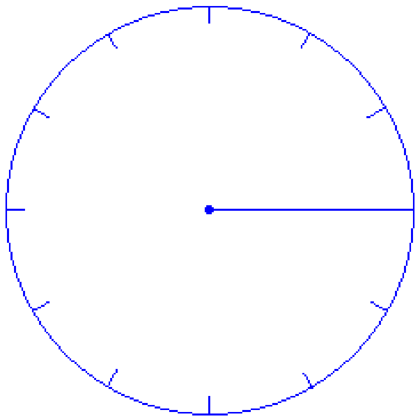
(خطـوات الـدرس السـبعة مـأخوذة مـن الموقـع "**Area of a Circle**" الموجـود في):
http://www.mathsteacher.com.au/year8/ch11_area/07_circle/circle.htm
أدوات: ستحتاج إلى فرجار, مقص, مسطرة ومنقلة.

خطوات الدرس:

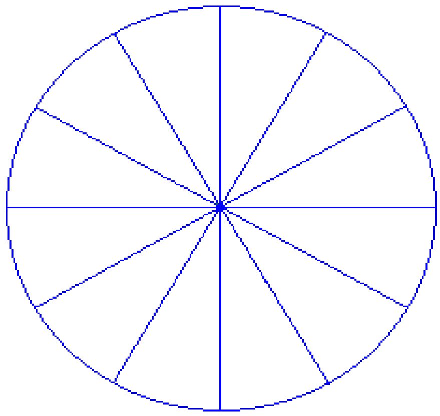
الخطوة الاولى: إستعمل الفرجار لترسم دائرة نصف قطرها 7 سم, ثم عـين مركـز الـدائرة وارسـم نصف قطرها.



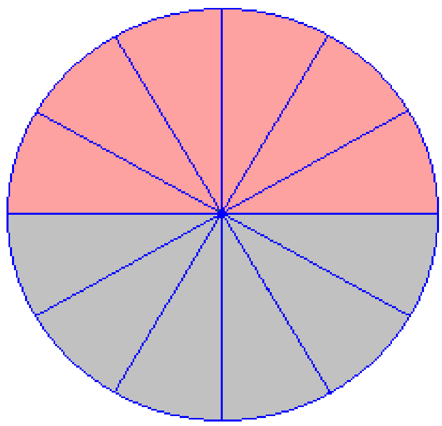
الخطوة الثانية: ضع مركز المنقلة على مركز الدائرة وخط صفر المنقلة على نصف قطـر الـدائرة. وعندها عين كل 30 درجة حول الدائرة.



الخطوة الثالثة: مستعملا مسطرة وقلم رصاص, أرسم خطوطا تصل بين كل علامة 30 درجة مع مركز الدائرة لتكون ستة أقطار. الرسم الذي ستحصل عليه سيحتوي على 12 قسما كما هو مبين أدناه:

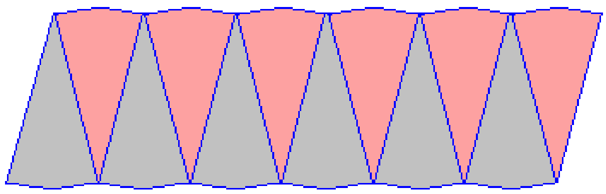


الخطوة الرابعة: لون الأقسام كما هو مبين أدناه:



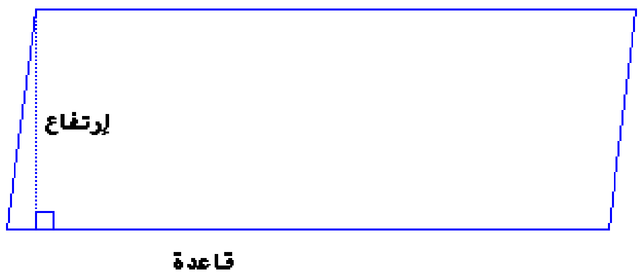
الخطوة الخامسة: قص الدائرة وبعدها قص على طول الأقطار بحيث تفصل بين كل الأقسام (القطاعات).

الخطوة السادسة: رتب القطاعات لتحصل على شكل يقترب من شكل متوازي الأضلاع كما هو مبين أدناه.



الخطوة السابعة:

(أ) مستعملا المسطرة قس قاعدة وارتفاع متوازي الأضلاع التقريبي الذي حصلت عليه سابقا:



(ب) جد مساحة متوازي الأضلاع.

(ج) ما هي العلاقة بين مساحة متوازي الأضلاع ومساحة الدائرة؟

(د) ما هي مساحة الدائرة إذا؟

(ه) مستعملا التعابير: نصف قطر ونصف محيط أكتب أطوال متوازي الأضلاع.

(و) مستعملا التعابير: نصف قطر ونصف محيط أكتب مساحة متوازي الأضلاع.

(ز) أكتب مساحة الدائرة بواسطة التعابير نصف قطر ونصف محيط.

(ح) تعلمت في درس سابق أن محيط الدائرة هو 2□r. ماذا تصبح مساحة الدائرة إذا؟

العمل في محيط برنامج حاسوبي:

هـذه الطريقـة اليونانيـة لإيجـاد مسـاحة الـدائرة معـبر عنهـا بواسـطة برنـامج حاسـوبي في http://curvebank.calstatela.edu/circle/circle.htm, اشتغل مع البرنامج لتقارن بـين مـا فعلته بالورق وما هو موجود بالبرنامج.

دمج تاريخ الرياضيات في درس الرياضيات: توصيات

في هذا المقال وصفنا أهمية دمج تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات, بحيث يكون التاريخ جـزء من عملية التعليم وليس فقط مركبا مقدما للموضوع أو مجرد ذكر أسمـاء الرياضـيين عنـدما يكـون درس الرياضيات متعلقا بأحد إنجازات الرياضيين. هذا الدمج هو الـذي يجعـل اسـتعمال تـاريخ الرياضيات في صف الرياضيات طريقة تعليم وتعلم بديلة قد تغير من اهتمام الطلاب بالرياضـيات ومن توجههم له. اقترحنا طرقا مختلفة للاهتمام بتاريخ الرياضـيات في المدرسـة وكيفيـة التغلـب على المشاكل الـتي قـد تعيـق دمـج تـاريخ الرياضـيات في درس الرياضـيات, وقـدمنا أمثلـة علـى مواضيع من التـاريخ يمكـن اسـتعمالها في صـف الرياضـيات في المدرسـة الابتدائيـة وعلـى دروس رياضيات في المدرسة الابتدائية يكون التاريخ جزء منها وليس دخـيلا عليهـا. مـا هـو مهـم أن لا تبقى الاقتراحات التي اقترحت اقتراحات نظرية فقط وإنما تطبق في المـدارس وهـذا يعـني إقنـاع بعض معلمي الرياضيات في مراحل الـتعلم المختلفـة بـدمج تـاريخ الرياضـيات في دروسـهم. بنـاء وإعداد دروس رياضيات لكافة مراحل التعلم تهتم بدمج التاريخ في درس الرياضيات سوف يسهل على معلمي المدارس استعمال هذه الدروس في صـفوفهم, ولـذلك فواجـب كليـات إعـداد المعلمـين والجامعات والمؤسسات التربوية الأخرى العمل على بناء دروس ووحدات دراسية كهـذه ونشـرها في كتب أو على شبكة الانترنت.

في هذا المقال وصفنا مواضيع تاريخية رياضية وأعطينا أمثلة على دمج تاريخ الرياضيات في صـف الرياضيات في المدرسة الابتدائية ومن المفيد أن نهتم في مقال آخر أو يهتم غيرنا بوصف المواضـيع التاريخية الرياضية وبإعطاء أمثلة علـى دروس تـدمج تـاريخ الرياضـيات في صـفوف الرياضـيات الإعدادية والثانوية وتلك التابعة للكلية وللجامعة.

خلاصة:

دمج تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات أصبح اليوم يجذب اهتمام باحثي التربية الرياضية كطريقة تعليم وتعلم بديلة وكوسيلة لجذب اهتمام الطلاب ودفعهم إلى التعلم. في هذا المقال وصفنا أهمية دمج تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات، بحيث يكون التاريخ جزء من عملية التعليم وليس فقط مركبا مقدما للموضوع أو مجرد ذكر أسماء الرياضيين عندما يكون درس الرياضيات متعلقا بأحد إنجازات الرياضيين. هذا الدمج هو الذي يجعل استعمال تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات طريقة تعليم وتعلم بديلة قد تغير من اهتمام الطلاب بالرياضيات ومن توجههم له. اقترحنا طرقا مختلفة للاهتمام بتاريخ الرياضيات في المدرسة وكيفية التغلب على المشاكل التي قد تعيق دمج تاريخ الرياضيات في درس الرياضيات، وقدمنا أمثلة على مواضيع من التاريخ يمكن استعمالها في صف الرياضيات في المدرسة الابتدائية وعلى دروس رياضيات في المدرسة الابتدائية يكون التاريخ جزء منها وليس دخيلا عليها. ما هو مهم أن لا تبقى الاقتراحات التي اقترحت اقتراحات نظرية فقط وإنما تطبق في المدارس وهذا يعني إقناع بعض معلمي الرياضيات في مراحل التعلم المختلفة بدمج تاريخ الرياضيات في دروسهم. بناء وإعداد دروس رياضيات لكافة مراحل التعلم تهتم بدمج التاريخ في درس الرياضيات سوف يسهل على معلمي المدارس استعمال هذه الدروس في صفوفهم، ولذلك فواجب كليات إعداد المعلمين والجامعات والمؤسسات التربوية الأخرى العمل على بناء دروس ووحدات دراسية كهذه ونشرها في كتب أو على شبكة الانترنت.

في هذا المقال وصفنا مواضيع تاريخية رياضية وأعطينا أمثلة على دمج تاريخ الرياضيات في صف الرياضيات في المدرسة الابتدائية ومن المفيد أن نهتم في مقال آخر أو يهتم غيرنا بوصف المواضيع التاريخية الرياضية وبإعطاء أمثلة على دروس تدمج تاريخ الرياضيات في صفوف الرياضيات الإعدادية والثانوية وتلك التابعة للكلية وللجامعة.

תקציר:

שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בכיתת המתמטיקה מושך את תשומת לבם של חוקרי החינוך המתמטי כשיטת הוראה ולמידה אלטרנטיבית וכדרך למשוך את תשומת לב התלמידים בכיתת המתמטיקה ולגרום להם לרצות ללמוד מתמטיקה. במאמר זה תיארנו את היתרונות של שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בשיעורי המתמטקה, תיארנו אפשרויות שונות לשילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בכיתת המתמטיקה ובבית הספר, ואת הקשיים הכרוכים בשילוב זה והצענו דרכים להתגבר על קשיים אלה. השימוש בהיסטוריה של המתמטיקה שהצענו הוא שילוב ההיסטוריה בעצם השיעור ולא רק תיאור מה שהיה או תיאור המתמטיקאי שלמתמטיקה שלו יש קשר לנושא של השיעור הנלמד.

במאמר זה תיארנו הרבה נושאים היסטוריייים שאפשר להשתמש בהם בכיתת המתמטיקה של בית הספר היסודי, כמו כן נתנו דוגמא איך לשלב את ההיסטוריה של המתמטיקה בכיתת המתמטיקה של בית ספר זה. נראה לנו שצריך מאמץ רב כדי לשכנע מורי המתמטיקה לשלב את ההיסטוריה של המתמטיקה בשיעוריהם, אבל השילוב שווה את המאמץ בגלל תוצאותיו החיוניות שיכולות לשנות את המצב הלא כל כך ורוד של כיתת המתמטיקה, אם זה בכיתת המתמטיקה היסודית או זו של חטיבת הביניים או התיכונית. מה שיעודד את המורים להשתמש בהיסטוריה של המתמטיקה בכיתת המתמטיקה הוא הכנת שיעורים שמשלבים היסטוריה זו, ואנו חושבים שזה תפקידן של המכללות להכשרות מורים ושל האוניברסיטאות שצריכות ליזום פעילות כזו ולממן אותה.

مصادر:

Aleff, P., (2003). Ancient values for Pi. http://www.recoveredscience.com/const124Pivalues.htm.

Arcavi, A.; Bruckheimer, M. and Ben-Zvi, R., (1982). Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics. *For the learning of mathematics* 3.1, 30-37.

Arcavi, Abraham, Maxim Bruckheimer and Ruth Ben-Zvi, 'History of mathematics for teachers: the case of irrational numbers', *For the learning of mathematics* 7.2 (1987) 18-23.

Barbin, E. (1991). The reading of original texts: How and why to introduce a historical perspective. For the Learning of Mathematics 11(2), 12 - 14.

Beck, G.; Tott, M., (2003). Calculating Pi: From Antiquity to Modern Times. http://documents.wolfram.com/v5/Demos/Notebooks/CalculatingPi.html.

Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. Mathematics Teacher 86(6), 461 - 464.

Bogomolny, L., (2003). Abacus in Various Number Systems. http://www.cut-the-knot.org/blue/Abacus.shtml.

Cooper, L., (1999). The Circle and the Square. http://www.sover.net/~rc/deep_secrets/circle_square.

Davitt, R. M. (2000). The evolutionary character of mathematics. Mathematics Teacher 93(8), 692 - 694.

Estrada, M. F., (1993). A historia no ensino da matematica [History in the teaching of mathematics]. Educacao e Matematica, 27(3), 17-20.

Fauvel, J., (1991). Using history in mathematics education. For the learning of mathematics, 11(2), 3-6.

Furinghitti, F., (2000). The long tradition of history in mathematics teaching. In V. Katz (Ed.), Using history to teach mathematics: An international perspective, (pp. 49-58). Washington, D.C: The mathematical Association of Amirica.

Hitchins, D. K., (2001). The Pyramid Builder's Handbook . http://www.hitchins.co.uk/PI.html.

Katsap, A., (2002). Humanizing Mathematics: The Humanistic Impression in the Course for Mathematics Teaching. Humanistic Mathematics Network Journal, 26, Claremont, CA.

Kelly, L., (2000). A mathematical history tour. Mathematics Teacher, 93(1), 14-17.

Lingard, D., (2000). The history of mathematics: an essential component of the mathematics curriculum at all levels.

Marshall, G. & Rich, B., (2000). The role of history in a mathematics class. Mathematics Teacher, 93 (8), 704-706.

Miller, J., (2003). Earliest Uses of Symbols for Fractions. http://members.aol.com/jeff570/fractions.html.

Miller, D. R., (2003). 5000 to 3000 BCE. http://din-timelines.com/bce5000-3000_timeline.shtml.

O'Connor, J. J. and Robertson E F., (1998). Leonardo Pisano Fibonacci. http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fibonacci.html.

O'Connor, J. J. and Robertson E F., (2000). A History of Zero. http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/Zero.html.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). Principles and Standards for School Mathematics.

Reimer, L. and Reimer, W. (1995). **Connecting Mathematics with its History**: A Powerful, Practical Linkage. In: House, P.A., Coxford, A.F. (Eds.). *Connecting Mathematics Across the Curriculum.* 1995 Yearbook. 104-114.

Rosa, A., (2001). Integrating History of Mathematics into the Mathematics Classroom. http://www.fc.up.pt/cmup/preprints/2001-25.ps.gz.

Rubenstein, R. N., and R. K. Schwartz. 2000. "**Word Histories: Melding** Mathematics and Meanings." *Mathematics Teacher* 93 (8): 664–669.

Shotsberger, P., (2000). Kepler and Wiles: Models of Perseverance. *Mathematics Teacher, 93*(8), 680-681.

Silva, C. M. & Arajo, C. A., (2001). Conhecendo e usendo a historia da matematica [Knowing and using the history of mathematics].

Smoller, L. A., (2001).Long multiplication in the Middle Ages: http://www.ualr.edu/~lasmoller/medievalmult.html.

Stander, D., (1989). The use of the history of mathematics in teaching. In P. Ernest (Ed.), Mathematics teaching: the state of the art, pp. 241-246. New York: The Palmer Press.

Strom, K. M., (2003). Mayan Math. http://www.hanksville.org/yucatan/mayamath.html.

Swetz, F. (1984). Seeking relevance: Try the history of mathematics. Mathematics Teacher, 77(1), 54-62, 47. Educacao e Matematica, 61(1), 19-21.

Thomaidis, Y., (1991). Historical digressions in Greek geometry lessons. For the learning of Mathematics. 11(2), 37-43.