בעיות במשולש

ד#ר עלי עותמאן

תקציר;

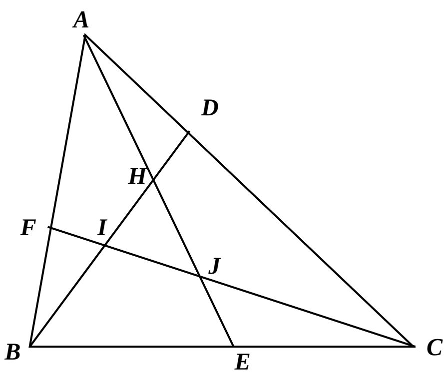
במאמר זה מקבלים נוסחה לחישוב שטח המשולש החסום בין שלושה ישרים העוברים דרך קודקודיו של משולש נתון. באמצעות הנוסחה מוכיחים את משפט צ׳יבה . מקבלים נוסחאות לחישוב ששת המשולשים החלקיים של המשולש במקרה ושלושת הישרים המועברים נפגשים בנקודה אחת.דרך החישוב מסתמכת על גבולות במטרה להמחיש לתלמיד את מושג הגבול באופן גיאומטרי יפה. הגדרנו את המושג ״שלוש נקודות הוגנות ביחס למשולש נתון״, שהן שלוש נקודות המונחות על צלעותיו כך ששלושת הישרים המחברים אותן עם הקודקודים הנגדיים שלו נפגשים בנקודה אחת.״ משולש הוגן ביחס למשולש נתון״ הוא משולש אשר קודקודיו הם שלוש נקודות הוגנות. הראינו כי המשולש ההוגן בעל השטח המקסימלי ביחס למשולש נתון הוא זה שקודקודיו הם נקודות האמצע של המשולש הנתון.

בעיה 2

נתון המשולש ABC.

מקודקודי המשולש מעבירים שלושה ישרים בתוך המשולש. כל ישר מחלק את הצלע שהוא חותך ביחס מסוים. שלושת הישרים יוצרים משולש HIJ בתוך המשולש ABC.

מהו היחס בין שטחי שני המשולשים HIJ ו- ABC כפונקציה של יחסי החלוקה של צלעות המשולש ע״י שלושת הישרים? (איור 1).



איור (1)

<u>פתרון הבעייה</u>:

נעביר מהנקודה A ישר מקביל לצלע BC.

נמשיך את BD עד שייפגש עם מקביל זה. נקרא לנקודת החיתוך G.

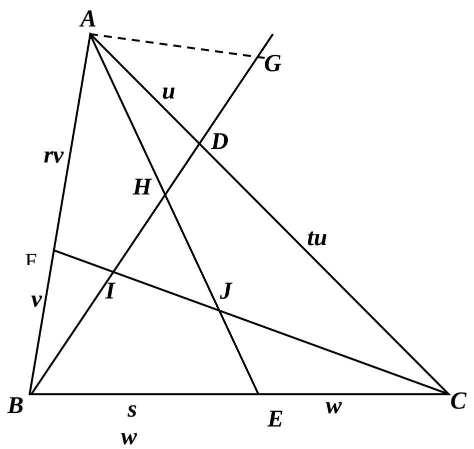
נסמן: $AD=u$, $BF=v$, $C = w$

נניח כי:

$$\frac{DC}{AD}=t$$

$$\frac{BE}{EC}=s$$

$$\frac{AF}{FB}=r$$



איור (2)

לפי סימונים אלה מתקבלים השוויונים: $DC=tu$, $BE=sw$, $AF=rv$.

שני המשולשים ADG , CDB דומים כי:

$\angle DBC=\angle AGD$ ו- $\angle BDC=\angle ADG$

כמו כן, שני המשולשים AHG ו EHB דומים כי:

$\angle AGH=\angle HBE$ ו- $\angle AHD=\angle BHE$.

מדמיון המשולשים ADG ו CDB נקבל: $\frac{DG}{BD}=\frac{AG}{CB}=\frac{AD}{CD}$,

לכן: $\frac{DG}{DB}=\frac{AG}{(s+1)w}=\frac{1}{t}$

לכן: $DB=t\cdot GD$ וגם $t\cdot AG=(s+1)w$

לכן: $AG=\frac{s+1}{t}w$

מדמיון המשולשים: AHG ו- EHB, נקבל: $\frac{AH}{EH}=\frac{AG}{EB}=\frac{HG}{HB}$

בפרט: $\frac{AG}{sw}=\frac{HG}{HB}=\frac{HD+DG}{BD-HD}$

נסמן $HD=x$, לכן: $\frac{s+1}{t\cdot s}=\frac{x+\frac{DB}{t}}{DB-x}$

לאחר שפותרים את המשוואה לפי x נקבל: $x=\frac{1}{st+s+1}\cdot DB$

לכן: $\frac{HD}{BD}=\frac{1}{st+s+1}=\frac{1}{(t+1)s+1}$

באופן אנלוגי נקבל כי:

$$\frac{FI}{FC}=\frac{1}{(r+1)t+1}$$
$$\frac{EJ}{AE}=\frac{1}{(s+1)r+1}$$

<u>נסמן עכשיו</u>: S_1=שטח המשולש AEC. S_2=שטח המשולש CFB.

S_3=שטח המשולש ADB. S_1^*=שטח המשולש ECJ.

S_2^*=שטח המשולש BFI. S_3^*=שטח המשולש ADH.

לפי סימונים אלה, ברור כי:

$$\frac{S_1^*}{S_1}=\frac{EJ}{EA}$$ וגם $$\frac{S_2^*}{S_2}=\frac{FI}{FC}$$ וגם $$\frac{S_3^*}{S_3}=\frac{HD}{DB}.$$

ואז מתקבלים השוויונים :

(1) $$S_1^*=\frac{1}{(s+1)r+1}\cdot S_1\ ,\quad S_2^*=\frac{1}{(r+1)t+1}\cdot S_2\ ,\quad S_3^*=\frac{1}{(t+1)s+1}\cdot S_3$$

מצד אחר ברור כי :

(2) $$S_1=\frac{S}{(s+1)}\ ,\quad S_2=\frac{S}{(r+1)}\ ,\quad S_3=\frac{S}{(t+1)}$$

כי היחס בין השטחים שווה ליחס בין אורכי הבסיסים.

נסמן ב $S_{(HIJ)}$ את שטח המשולש HIJ.

קל לראות כי :

$$S_{(HIJ)}=S-(S_1+S_2+S_3)+S_1^*+S_2^*+S_3^*$$
$$=S-(S_1-S_1^*)-(S_2-S_2^*)-(S_3-S_3^*)$$

בעזרת הנוסחה (1) נקבל :

$$S_{(HIJ)}=S-\frac{r(s+1)}{r(s+1)+1}\cdot S_1-\frac{t(r+1)}{t(r+1)+1}\cdot S_2-\frac{s(t+1)}{s(t+1)+1}\cdot S_3$$

ובעזרת הנוסחה (2) נקבל :

$$S_{(HIJ)}=S-\frac{r}{r(s+1)+1}\cdot S-\frac{t}{t(r+1)+1}\cdot S-\frac{s}{s(t+1)+1}\cdot S$$
$$=S\cdot\left[1-\frac{r}{r(s+1)+1}-\frac{t}{t(r+1)+1}-\frac{s}{s(t+1)+1}\right]$$

לאחר פישוט, וחישובים מיגעים קצת, נקבל כי :

$$S_{(HIJ)}=\frac{(rst-1)^2\cdot S}{[r(s+1)+1]\cdot[s(t+1)+1]\cdot[t(r+1)+1]}$$

ובכך קיבלנו כי :

$$\frac{S_{(HIJ)}}{S_{(ABC)}}=\frac{(rst-1)^2}{[r(s+1)+1]\cdot[s(t+1)+1]\cdot[t(r+1)+1]} \qquad (3)$$

בתור מסקנה מנוסחה זו נקבל את משפט צ״יבה *C'eva*.

<u>משפט ***C'eva***</u> : שלשת הישרים *AE* , *BD* , *CF* נפגשים בנקודה אחת ויחידה אם ורק מתקיים :

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{EC}{EB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

<u>הוכחה</u> : לפי הנוסחה (3) שקיבלנו :

הישרים *AE* , *BD* , *CF* נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם שטח ״המשולש שהם חוסמים״ שווה 0. וזה מתקיים, ע״פ נוסחה (3), אם ורק אם *rst=1*.

וזה קורה אם ורק אם :

$$\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CD}{AD}=1$$

<u>דוגמה 2</u>: כאשר $r = s = t = 1$ נקבל כי השטח שווה *0*. המשמעות ההנדסית במקרה הזה היא "שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

<u>דוגמה 3</u>: אם צלעות המשולש ABC הם כדלקמן: $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$ (איור 2)

ואם r,s,t הם: $t=\frac{a}{c}, \quad s=\frac{c}{b}, \quad r=\frac{b}{a}$, אז: $r\cdot s\cdot t=1$ לכן הישרים CF , BD , AE נפגשים בנקודה אחת, מצד אחר ידוע כי ישרים אלה הם חוצי זוויות המשולש.

<u>דוגמה 4</u>: אם $r=s=t=2$. משמעות הדבר במקרה הזה היא שהישרים CF , BD , AE , מחלקים את צלעות המשולש ביחס 1:2.

במקרה זה מתקיים: $\frac{S_{(HIJ)}}{S_{(ABC)}}=\frac{(8-1)^2}{7\cdot 7\cdot 7}=\frac{1}{7}$

כלומר שטח המשולש ABC גדול פי 7 משטח המשולש HIJ.

<u>דוגמה 5</u>: אם $r = s = t = n$ אז מתקיים:

$$\frac{S_{(HIJ)}}{S_{(ABC)}}=\frac{(n^3-1)^2}{(n^2+n+1)^3}=\frac{(n-1)^2\cdot(n^2+n+1)}{(n^2+n+1)^3}$$
$$=\frac{(n-1)^2}{n^2+n+1}=1-\frac{3n}{n^2+n+1}$$

<u>סימון</u>: $f(r,s,t)=\frac{(rst-1)^2}{[r(s+1)+1]\cdot[s(t+1)+1]\cdot[t(r+1)+1]}$

קל לגלות כי: $f(r,s,t)=f(s,t,r)=f(t,r,s)$

(ע"י שיקולים אנלוגיים מההתבוננות באיור או ע"י חישובים ישירים, או מהבנת המבנה האלגברי של הנוסחה)

קיים קשר מעגלי בעל אורינטציה חיובית.

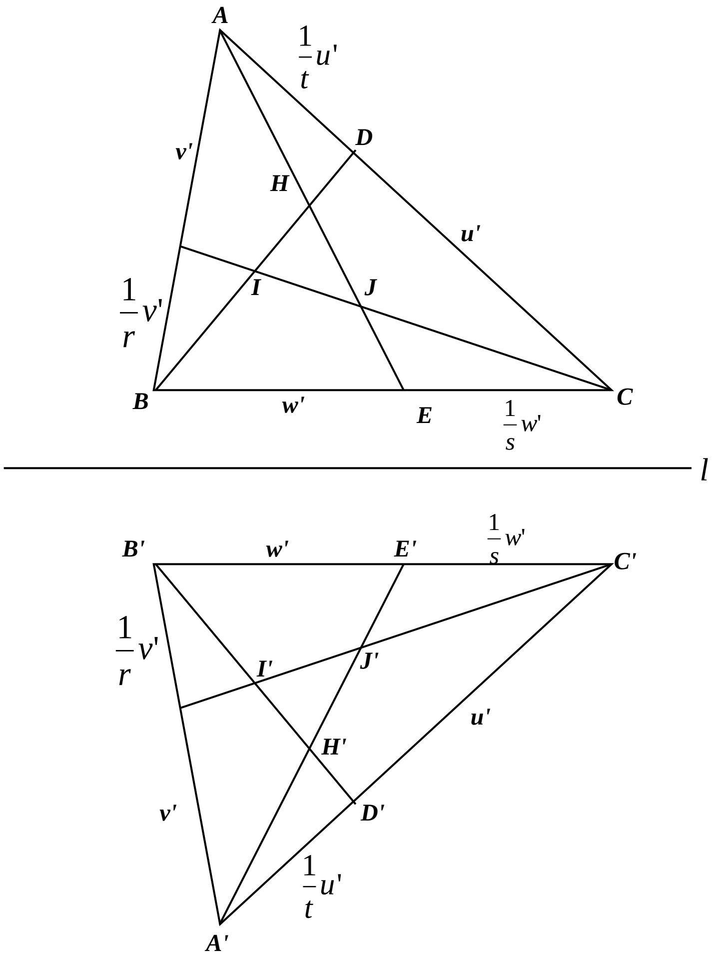
<u>הערה</u>; כאשר מחליפים את:

rv ב v' , $\left(v=\frac{1}{r}v' \right)$ ו- tu ב u' , $\left(u=\frac{1}{t}u' \right)$ ו- sw ב w' , $\left(w=\frac{1}{s}w' \right)$

ע"י שיקוף בישר שמתחת למשולש ABC, (ראה איור 3) נקבל כי שטח המשולש HIJ (השווה לשטח המשולש $H'I'J'$) הוא: $S\,f\left(\frac{1}{r},\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right)$.

ולפי תכונות הפונקציה f מתקיים:

$$f\left(\frac{1}{r},\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right)=f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{s},\frac{1}{r}\right)=f\left(\frac{1}{s},\frac{1}{r},\frac{1}{t}\right)$$



(איור מס׳ 3)

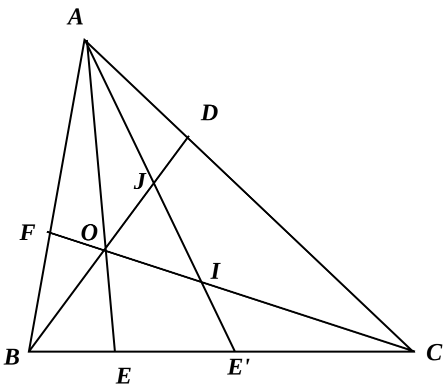
קיים קשר מעגלי בעל אוריינטציה שלילית:

קיבלנו:

$$S_{(HIJ)}: S = f(r,s,t) = f(s,t,r) = f(t,r,s) = f\left(\frac{1}{r},\frac{1}{t},\frac{1}{s}\right) = f\left(\frac{1}{t},\frac{1}{s},\frac{1}{r}\right) = f\left(\frac{1}{s},\frac{1}{r},\frac{1}{t}\right)$$

(ממולץ לבדוק נכונות השוויונים ע״י חישוב ישיר).

<u>בעיה 3</u>



<u>חישוב חלקי משולש כאשר החותכים נפגשים בנקודה אחת.</u>

נתון משולש ABC ושלשה ישרים AE , BD , CF הנפגשים בנקודה O. נניח כי:

$\frac{AF}{FB}=r_0, \frac{DC}{AD}=t_0$ ו- $\frac{BE}{EC}=s_0$. נסמן ב M את שטח ABC.

לפי משפט צ׳יבה ברור כי ($r_0 \cdot s_0 \cdot t_0=1$). תהי E' נקודה בין E ו C. AE' יוצר עם CO ו- DO משולש OIJ. קל לראות שאם E' מתקרבת ל- C אז OIJ יתקרב אל המשולש ODC.

כלומר: $\lim\limits_{E'\to C} OIJ = ODC$

ולכן: $\lim\limits_{E'\to C} S_{(OIJ)} = S_{(ODC)}$

נסמן $\frac{BE'}{E'C}=s$ אז לפי נוסחה (3): $S_{(OIJ)}=f(r_0,s_0,t_0)\,M$

לכן: $S_{(ODC)}=\lim\limits_{s\to\infty} f(r_0,s,t_o)$ (כי אם $E'\to C$ אז $\frac{BE'}{E'C}\to\infty$)

$$=\lim_{s\to\infty} f\left(\frac{1}{r_0},\frac{1}{t_0},\frac{1}{s}\right)\cdot M = f\left(\frac{1}{r_0},\frac{1}{t_0},0\right)\cdot M$$

העובדה ש : $f\left(\frac{1}{r_0},0,\frac{1}{t_0}\right) = f\left(\frac{1}{r_0},\frac{1}{s},\frac{1}{t_0}\right) \lim_{s\to\infty} =$

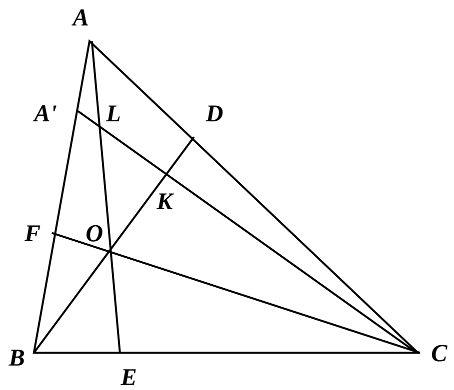
נובעת מרציפות הפונקציה f ב 0, ניתן להוכיח זאת ע"י חישוב ישיר (חלק ב s^2 מונה ומכנה).

תהי B' נקודה על BE. AB' יוצר ביחד עם שני הישרים BO ו FO משולש $OI'J'$.

כאשר B' מתקרבת ל B אז המשולש $OI'J'$ מתקרב אל המשולש BOF.

אם $\frac{BE'}{B'C}=s$ אז $s\to 0$ כאשר $E'\to B$.

לכן : $S_{(BFO)}=\underset{E'\to B}{Lim}S(OI'J')=\underset{s\to 0}{Lim}\, f(r_0,s,t_0)M=f(r_0,0,t_0)M$



נחשב עכשיו את שטח המשולש AOD:

תהי A' נקודה בין A ו F.

הישר CA' יוצר עם OD ו OA משולש OKL.

נסמן : $\frac{AA'}{A'B}=r$

אם $A'\to A$ אז $r\to 0$ ו- $OKL\to OAD$.

לכן : $S_{(OAD)}=Lim\, f(r, s_0, t_0)M=f(0, s_0, t_0)M$

מצד אחר, מאחר ו- $DC=t_0\cdot AD$ אז $S_{(DOC)}=t_0.S_{(AOD)}$

לכן : $S_{(DOC)}=t_0\cdot f(0, s_0, t_0).M$. אבל אנו כבר יודעים כי $S_{(AOD)}=f(1/r_0,\ 1/t_0,\ 0).M$

הקורא מתבקש להוכיח בתור תרגיל- באופן ישיר כי ;

$f(1/r_0,1/t_0,0)=t_0f(0,s_0,t_0)$ (שים לב: $r_0\cdot t_0\cdot s_0=1$)

באופן דומה ניתן לקבל נוסחאות עבור החלקים האחרים של המשולש.

שטחי חלקי המשולש הם:

$S_{(ODA)}=f(0,s_0,t_0)\cdot M$, $S_{(ODC)}=t_0f(0,s_0,t_0)\cdot M$

$S_{(OEC)}=f(r_0,s_0,0)\cdot M$, $S_{(BOE)}=s_0f(r_0,s_0,0)\cdot M$

$S_{(BOF)}=f(r_0,0,t_0)\cdot M$, $S_{(AOF)}=r_0f(r_0,0,t_0)\cdot M$

<u>שאלה</u>: מה צריך להיות הקשר בין r_0,s_0,t_0 כדי ש $S_{(ODC)}=S_{(BOF)}$?

<u>תשובה</u>: בודאי שזה מתקיים אם ורק אם FD מקביל ל BC. וזה קורה אם ורק אם $r_0=1/t_0$. אם ורק אם $r_0.t_0=1$ אם ורק אם $s_0=1$.

נענה עכשיו על אותה שאלה ע"י שימוש בנוסחאות.

$$f\left(\frac{1}{r_0},\frac{1}{t_0},0\right) = f(r_0,0,t_0) \qquad \Leftrightarrow \quad S_{(DOC)} = S_{(BOF)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{1}{r_0}\left(\frac{1}{t_0}+1\right)+1\right]\left[\frac{1}{t_0}+1\right] = (r_0+1)[t_0(r_0+1)+1]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{(1+t_0+r_0+r_0t_0)(t_0+1)}{r_0t_0^{\;2}} = (r_0+1)[t_0(r_0+1)+1]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{t_0+1}{r_0t_0^{\;2}} = (r_0+1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t_0+1 = r_0^{\;2}t_0^{\;2}+r_0t_0^{\;2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t_0^{\;2}(r_0^{\;2}+r_0)-t_0-1=0$$

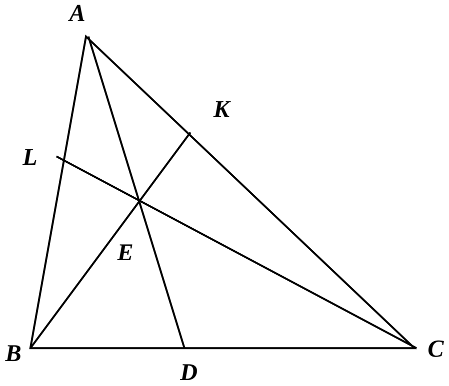
נפתור את המשוואה עבור t_0. למשוואה יש שני שורשים בעלי סימנים שונים. לכן נבחר רק בשורש החיובי כי $t_0 > 0$.

$$t_0 = \frac{1+\sqrt{1+4r_0^{\;2}+4r_0}}{2(r_0^{\;2}+r_0)} = \frac{1+2r_0+1}{2r_0(r_0+1)} = \frac{2(r_0+1)}{2r_0(r_0+1)} = \frac{1}{r_0}$$

כלומר: $s_0=1$ $\qquad t_0=1/r_0$ $\qquad t_0\cdot r_0=1$

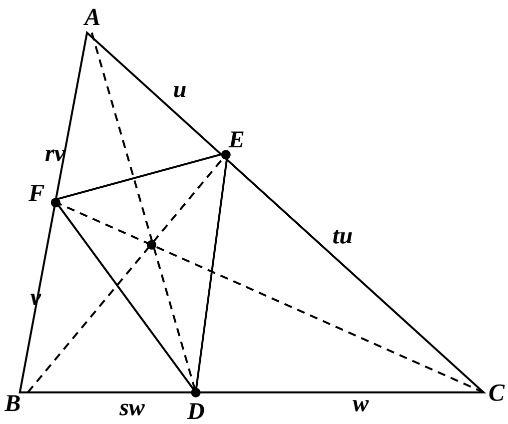
בשאלה הקודמת מתחבא התרגיל הבא שהוא מסקנה ממשפט צ׳יבה וממשפט טאליס.

מסקנה *תרגיל) :



נתון משולש ABC. AD תיכון לצלע BC. נבחר על AD נקודה E.נעביר שני ישרים. האחד בין C ו E הפוגש את AB בנקודה L, והשני בין B ו- E הפוגש את AC בנקודה K. הוכח כי $LK || BC$.

בעיה 4



הגדרה : נאמר על שלש נקודות הנמצאות על צלעותיו של משולש שהן "שלוש נקודות הוגנות ביחס למשולש" אם שלשת הישרים המחברים נקודות אלה עם הקודקודים הנגדיים של המשולש נפגשים בנקודה אחת. בציור שלש הנקודות $D,\ E,\ F$ הן נקודות הוגנות של המשולש ABC. משולש אשר קוקודיו הם שלוש נקודות הוגנות ביחס למשולש נתון יקרא " משולש הוגן ביחס למשולש הנתון#/

לפי משפט צ׳יבה אנו יודעים שאם $D,\ E,\ F$ הוגנות אז :

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

נניח כמו קודם : $AE=u$, $CE=t\cdot u$, $DC=w$, $BD=sw$, $BF=v$, $AF=r\cdot v$.

ברור כי $r \cdot s \cdot t=1$. רוצים למצוא את שטח המשולש DEF באמצעות M, שהוא שטח המשולש ABC, ו- r,s,t.

ברור כי;

$$S_{(ADC)} = \frac{1}{s+1} \cdot M$$

$$S_{(DEC)} = \frac{t}{t+1} \cdot S_{(ADC)} = \frac{t \cdot M}{(s+1)(t+1)}$$

$$S_{(ABD)} = \frac{s}{s+1} \cdot M$$

$$S_{(BFD)} = \frac{1}{r+1} \cdot S_{(ABD)} = \frac{s \cdot M}{(r+1)(s+1)}$$

$$S_{(AFC)} = \frac{r}{r+1} \cdot M$$

$$S_{(AEF)} = \frac{t}{t+1} \cdot S_{(AFC)} = \frac{r \cdot M}{(t+1)(r+1)}$$

$$S_{(EFD)} = M - \left(\frac{t \cdot M}{(s+1)(t+1)} + \frac{s \cdot M}{(r+1)(s+1)} + \frac{r \cdot M}{(t+1)(r+1)} \right)$$

$$S_{(EFD)} = \left(1 - \frac{t}{(s+1)(t+1)} - \frac{s}{(r+1)(s+1)} - \frac{r}{(t+1)(r+1)} \right) \cdot M$$

$$= \left(\frac{(s+1)(t+1)(r+1) - t(r+1) - s(t+1) - r(s+1)}{(s+1)(t+1)(r+1)} \right) \cdot M$$

$$= \frac{\mathrm{r \cdot s \cdot t} + 1}{(s+1)(t+1)(r+1)} . M$$

מאחר ו- $r \cdot s \cdot t = 1$ אזי: $S_{(EFD)} = \frac{2}{(s+1)(t+1)(r+1)} \cdot M$

שאלה; מהו הקשר בין r,s,t על מנת ששטח המשולש EFD יהיה נקסימלי?

שטח המשולש EFD מקסימלי אם ורק אם המכנה יהיה מינימלי:

$$(s+1)(r+1)(t+1)=rst + sr + st + rt +r + s + t + 1$$
$$=2 + sr + t + st + r + rt + s$$
$$=2 + 1/t + t + 1/r + r + 1/s + s$$
$$=2 + (t+1/t) + (r+1/r) + (s+1/s)$$

אבל ידוע כי אם $x>0$ אז $x+1/x\geq 2$ וכי השויון מתקיים אך ורק אם $x=1$.

לכן הביטוי האחרון גדול שווה ל 8.

ולכן שטח המשולש EFD הוא לכל היותר $1/4\ M$. וזה מתקיים כאשר $t=r=s=1$. כלומר כאשר הנקודות E, F, D הן נקודות האמצע של צלעות המשולש ABC.

מסקנה; המשולש ההוגן בעל השטח המקסימלי ביחס למשולש נתון הוא זה שקודקודיו הם נקודות האמצע של צלעות המשולש הנתון.