الكتابة في صف الرياضيات

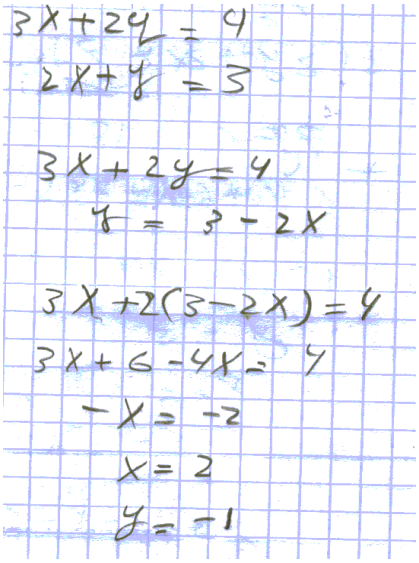
وجيه ضاهر

كثير من معلمي الرياضيات وباحثي التربية الرياضية يهتمون في العقدين الأخيرين بالكتابة في صف الرياضيات، ونعني بالكتابة دمج اللغة الطبيعية بكتابة الطلاب. يصف هؤلاء المعلمون والباحثون فوائد الكتابة في صف الرياضيات للمعلم والطلاب: الكتابة الرياضية تحسن الاتصال بين المعلم وطلابه وهذا يمكنه من تقويم معرفة طلابه ووضعهم الرياضي بشكل أفضل، مما يساعده في تعيين عناصر تعليمه التي ينبغي تغييرها، إذا كان ذلك ضروريا لتعلم طلابه، كما يساعده في الاهتمام أكثر بواحد أو أكثر من الطلاب الذين يرى – نتيجة قراءة كتابتهم – ما هي حاجاتهم الخاصة. الكتابة الرياضية تمكن من توفير وضع مثالي بين المعلم وكل واحد من طلابه، عندما يعلق المعلم على كتابة طالبه مجيبا على تساؤلاته أو سائلا إياه سؤالا يثير نقاشا مفيدا للطالب والمعلم، وإن كان هناك حاجة يستطيع المعلم أن يثير القضية التي يراها مناسبة من كتابة أحد طلابه في الصف أمام جميع الطلاب (بعد أن يأخذا موافقة طالبه) وبذلك يثري كل الطلاب نتيجة النقاش الجماعي في الصف. الكتابة الرياضية تفيد الطلاب أيضا، حيث تمكنهم من التفكير بموضوع كتابتهم وتوفر لهم الوقت للقيام بذلك، كما تجعلهم واعين لمدى فهمهم أو عدم فهمهم للموضوع الرياضي الذي يكتبون عنه، وعندها يستطيعون التوجه لمعلمهم أو لطالب آخر في صفهم لتفسير ما صعب عليهم فهمه.

هذا المقال يصف أهمية الكتابة الرياضية ووظائفها المختلفة. كذلك يصف أنواع الكتابة الرياضية المختلفة ويعطي أمثلة عليها، المقال يشير إلى مصادر مهمة يمكن أن تساعد معلمي الرياضيات في دمج الكتابة في صف الرياضيات، ويشير إلى الشروط التي تجعل دمج الكتابة الرياضية في صفوفنا سهلا نسبيا، كذلك يري اتجاهات بحث مستقبلية.

مقدمة:

أكثر معلمي وطلاب الرياضيات يعتقدون أن الرياضيات هي لغة رموز وأحيانا يمكن أن نستعمل بها رسوما, بيانية وغير بيانية, وبناء على ذلك يعتقدون أيضا أن لا مكان للغة الطبيعية في الرياضيات, وأن مكان اللغة الطبيعية بعيد جدا عن الرياضيات في فروع معرفة مختلفة مثل اللغات والعلوم الاجتماعية. المثال التالي المأخوذ من دفتر إحدى طالبات الصف الثامن, وهو تمرين حل معادلتين خطيتين بمتغيرين, يوضح ما أقول:



نحن نرى أن الطالبة, حتى تحل المعادلتين الخطيتين / بمتغيرين / المعطيتين (وقد استعملت للحل طريقة التعويض), لم تستعمل كلمة واحدة. عندما اطلعت على حلها حاولت أن أجعلها تفسر ما تحل بالكلمات (وهناك أكثر من مكان كان عليها أن تفسر ما فعلت), ولكنها رفضت قائلة: نحن لا نستعمل الكلمات بالصف, هكذا تحل لنا المعلمة, لماذا هي الكلمات في الرياضيات؟

حتى أوضح ما أعنيه باستعمال الكلمات بالحل أرفق ملحق (1) الذي يحتوي على حل المعادلتين مع استعمال بسيط للغة الطبيعية, ويمكن للطالب المعتاد على الكتابة الرياضية أن يغير به الكلمات المستعملة أو يزيد ما بدا له. ملحق (2) يوضح ما أعنيه بالتغيير أو الزيادة التي يمكن أن يصنعهما الطالب.

ظاهرة عدم استعمال الكتابة باللغة الطبيعية في صف الرياضيات لفتت منذ حوالي العقدين انتباه بعض مربي الرياضيات الذين اعتقدوا أن الكتابة يمكن أن تحسن تعلم طلابهم وتعليمهم هم أنفسهم. اهتمامهم بالكتابة الرياضية تماهى مع اهتمام مربين من فروع معرفة أخرى بالكتابة. Emig (1977), كما يخبر Miller (1991), كتبت أن الكتابة في مضمون معين يمكن أن تجعل الطلاب يحللون, يقارنون بين الحقائق ويركبون موادا

ملائمة. Kennedy (1980), كما يخبر أيضا Miller (1991), يقول بأن الطلاب, عندما يكتبون عن موضوع معين, سيفكرون به, يذوتون مفاهيم مهمة, ويجعلون هذه المفاهيم, بدرجة معينة, مفاهيمهم.

إن تنامي أهمية الكتابة والاتصال الرياضيين قد عبّر عنه في المعايير والقواعد التي وضعها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة (NCTM), وهو من أهم المؤسسات الرياضية في العالم ان لم يكن أهمها. المعايير تشدد على أهمية الاتصال في صف الرياضيات بما في ذلك الكتابة, واصفة وظائفه المختلفة في التربية الرياضية:

Communication is an essential part of mathematics and mathematics education. It is a way of sharing ideas and clarifying understanding. Through communication, ideas become objects of reflection, refinement, discussion, and amendment. The communication process also helps build meaning and permanence for ideas and makes them public. When students are challenged to think and reason about mathematics and to communicate the results of their thinking to others orally or in writing, they learn to be clear and convincing. Listening to others' explanations gives students opportunities to develop their own understandings. Conversations in which mathematical ideas are explored from multiple perspectives help the participants sharpen their thinking and make connections.

(NCTM, 2000, ص. 60)

بالإضافة إلى ذلك تتوقع المعايير من الطلاب, عندما يتواصلون رياضيا, أن يحللوا ويقوّموا تفكير الآخرين الرياضي واستراتيجياتهم, وأن يستعملوا لغة الرياضيات ليعبروا عن الأفكار الرياضية بشكل دقيق (ص. 61–62). Dougherty (1996) تقول بأنه يبدو أن العامل الكتابي أثر على تطور المفاهيم الجبرية لطلابها بصورة دراماتيكية, وهي تفسر ذلك بوصفها الكلام الشفوي, وهو الاتصال الأكثر انتشارا في الصف, بأنه لا يتطلب الأحكام الضروري للقطع المكتوبة, بينما الأفكار يجب أن تعالج بصورة أعمق في الكتابة لأن القارئ لا يستطيع أن يركب من جديد مقاصد الكاتب (ص. 556). Richards (1990) تقول بأن طلابها (وعمرهم 7 سنوات) يستعملون اللغة كأداة لتعلم الرياضيات وفي نفس الوقت

لتطوير مقدراتهم اللغوية (ص. 25). Clarke وآخرون (1993) استعملوا الكتابة الرياضية من نوع المجلة ليعززوا رؤية الطلاب لأنفسهم كعوامل فعالة في عملية بناء المعرفة الرياضية, وليجعلوا الطلاب يدركون "الطبيعة" الحقيقية للرياضيات والتي هي البحث عن النماذج, صنع الفرضيات وفحصها, التعميم وسؤال *لماذا؟* محاولة أن يفكروا بشكل نظامي (systematic), أن يصنفوا, أن يحولوا (من صيغة إلى صيغة), أن يبحثوا عن طرق, أن يقرروا بالنسبة للقوانين الرياضية, أن يعرّفوا, أن يتفقوا على المتطابقات, أن يفكروا بالأسباب, أن يقدموا الأدلة, يعبروا عن شكهم ويبرهنوا (ص. 239).

وظائف الكتابة الرياضية:

وصفنا سابقا كيف ينظر المربون والباحثون الرياضيون المهتمون بالكتابة الرياضية إلى هذه الكتابة, ونفصل الآن الوظائف التي ذكرها هؤلاء المربون والباحثون للكتابة في صف الرياضيات (معللين استعمالهم للكتابة الرياضية وذاكرين ما وجدوه نتيجة تجاربهم وفي أبحاثهم):

<u>وظائف الكتابة الرياضية</u>

(1) التواصل في صف الرياضيات:

الكتابة الرياضية تتيح التواصل بين المعلم وطلابه, بين الطلاب وبعضهم البعض وبين الطالب ونفسه (Watson, 1980). عندما يكتب الطالب يتضح تفكيره لمعلمه, لأترابه ولنفسه؛ عندها يظهر بوضوح ما يعلمه الطالب وما لا يعلمه (Elliott, 1996؛ Gordon & Macinnis, 1993). Chapman (1996) تقول بأن كتابة بعض الطلاب مكنتها من اكتشاف مقدرتهم الرياضية التي أخفتها علامات منخفضة (ص. 588).

(2) وسيلة لمعرفة الطالب:

نتيجة للتواصل بين المعلم وطلابه الذي تتيحه الكتابة الرياضية, يتمكن المعلم من الاطلاع على معرفة الطالب المفاهيمية (conceptual knowledge) والإجرائية (procedural), ومن تقويم هذه المعرفة بما فيها من فهم وسوء فهم, وعندها يستطيع أخذ قرارات ملائمة ليعزز معرفة طلابه أو ليقومها. Chapman (1996) تذكر أن الاطلاع على معرفة كل

طالب جعلها تستطيع التوجه لكل واحد من طلابها بشكل منفرد عبر مجلاتهم (ص. 589).

(3) **تقويم طرق التعليم**:

Gordon و Macinnis (1993) وجدا أنه نتيجة للتواصل بينهما وبين طلابهما عن طريق الكتابة الرياضية قاما باتخاذ قرارات تختص بطرق تعليمهما, مما أدى إلى تعزيز أساليبهما التعليمية. وهذا ما تخبرنا به Chapman (1996) عن نفسها كنتيجة لاستعمالها الكتابة في صفها.

(4) **وسيلة لتخطيط دروس**:

كتابة الطلاب في نهاية الدرس تساعد المعلم على أن يقرر ماذا يفعل في الدرس التالي: يقدم درسا جيدا أم يعلق على الدرس السابق ليزيل سوء فهم لدى الطلاب (Elliott, 1996).

(5) **تقويم طرق التعلم**:

Gordon و Macinnis (1993) وجدا أن كتابة الطلاب الرياضية تمكنهم من تقويم نقاط القوة ونقاط الضعف التي يعتقدون أنها تؤثر على تعلمهم, كذلك تجعلهم واعين بما يلائمهم من طرق دراسية وما لا يلائمهم.

(6) **تعزيز طرق التعلم**:

الكتابة الرياضية تشجع وتعزز تعلم الطالب (Gordon & Macinnis, 1993), فهي تمكن الطالب من التقدم حسب سرعته الخاصة ومن الوصول لفهم المفاهيم الرياضية مستعملا تجاربه الخاصة (Nahrgang & Peterson, 1986). كتابة الطلاب الرياضية تجعلهم واعين لما يعرفونه وما لا يعرفونه من الموضوع الرياضي الذي يتعلمونه وهذا يمكنهم من التركيز على شرح المعلم التالي وسؤاله عما لا يعرفونه وبهذا يقل خوفهم من الرياضيات. كذلك وجد Nahrgang و Peterson (1986) أن تجربة الطلاب في الكتابة الرياضية أدت إلى تحسن واضح في ترتيب إجاباتهم مما جعلها أسهل للقراءة (ص. 463).

(7) **التعبير عن الجانب العاطفي تجاه للرياضيات**:

Chapman (1996) وجدت أن الكتابة مكنت الطلاب من التعبير عن احباطهم بالنسبة لتعلم أفكار رياضية معينة, وعن طلبهم العون من المعلم ليخرجوا من الاحباط (ص. 589). Gordon و Macinnis (1993) وجدا أن الطلاب عبروا في كتابتهم الرياضية الحرة (من نوع مجلة) عن مشاعر وعواطف شخصية ونتيجة هذا التعبير انبنت علاقات شخصية بين المعلم وطلابه (ص. 41).

(8) **محيط الطلاب ذوي الحاجات الخاصة**:

بالنسبة للطلاب "غير المتكلمين", الكتابة كانت أسهل من التحدث مع المعلم وجها لوجه (Gordon & Macinnis, 1993, ص. 42). Chapman (1996) تذكر أن طالبا معروفا بعدم شعوره بالحاجة إلى مساعدة, مع حاجته إليها, وبصد كل محاولة لها (Chapman) للمساعدة, كتب لها في نهاية إجابته على أحد أسئلتها طالبا مساعدتها في فهم نقطة معينة تتعلق بالسؤال. وترجع Chapman كتابة الطالب لها طالبا المساعدة إلى أن الكتابة هي قناة أكثر سهولة للتعبير عن النفس من المحادثة الشفهية (ص. 589).

أنواع الكتابة الرياضية

يصنف أكثر الباحثين في الكتابة في صف الرياضيات هذه الكتابة لثلاثة أنواع: كتابة مجلة, كتابة مفسرة وكتابة خلاقة, أما McIntosh (1991) فتقسم الكتابة الرياضية لأربعة أنواع, قاسمة النوع الأول (كتابة المجلة) لقسمين: "سجل" و "مجلة", حيث لكليهما نفس الهدف وهو تسهيل تعلم الطلاب واطلاع المعلم على التعلم الذي يحدث في صفه. McIntosh تقول بأن الفرق بين النوعين هو كون المجلة أقل رسمية من السجل, ولذلك يمكن أن تكون محيطا أكثر سهولة للاتصال (McIntosh, 1991, ص. 430). في وصفنا لأنواع الكتابة الرياضية سوف نتحدث عن ثلاثة أنواع للكتابة الرياضية, تلك التي تحدث عنها أغلب الباحثين.

النوع الأول من الكتابة الرياضية / مجلة (وهو أكثر الانواع التي يتحدث عن استعمالها المربون والباحثون الرياضيون): هي سلسلة من المهام الكتابية على شكل يومية. كل مهمة

أو تدوين هو اجابة مكتوبة مختصرة لسؤال يطرحة المعلم أو لمجموعة من التعليمات؛ الاجابة مكتوبة نثرا وليس بالطريقة الرياضية المعهودة من أعداد ومعادلات (Nahrgang & Peterson, 1986).

Gordon و Macinnis (1993) يذكران أنهما استعملا نوعين من كتابة "المجلة":

- **الكتابة عن طريق الحث** (prompted writing), حيث الطلاب أجابوا على أسئلة طرحها المعلم. كمثال على هذه الكتابة يذكر Gordon و Macinnis أنهما لكي يفحصا فهم الطلاب في موضوع الكسور العشرية استعملا الكتابة عن طريق الحث عندما سألا الطلاب السؤال التالي: "ما هي الكسور العشرية حسب رأيك؟ أيهما أكبر: 0.5 أم 0.42, ولماذا؟"

- **الكتابة الحرة** (كتابة مفتوحة), ليكتشف الطلاب طرق تفكيرهم بصورة مستقلة. Gordon و Macinnis يذكران أنهما طلبا من الطلاب أن يكتبوا ما يبدو لهم مما يتعلق بالرياضيات.

Dougherty (1996) تقسم أنواع الحواث (prompts) في الكتابة الرياضية من نوع مجلة التي استعملتها مع طلابها إلى 3 أقسام (الامثلة على كل نوع مأخوذة من نفس المصدر):

- **حواث تتعلق بالمضمون الرياضي (Mathematical-content prompts):**

حواث المضمون الرياضي تهتم بنقاط أو جوانب رياضية والعلاقات بينها. يمكن أن يطلب من الطلاب أن يقارنوا بين نقاط مختلفة, مثلا "الفرق بين الميل غير المعرف والميل الصفر هو ...". يمكن أن يطلب من الطلاب أن يعرفوا بكلماتهم ماذا يعني مفهوم معين, مثلا: "أعتقد أن الدالة هي ....." لاحقا, عندما يكون لدى الطلاب تجربة مع الدالة, يمكن لحاث كتابي أن يركز على كيفية تغير آرائهم بالنسبة لمفهوم معين, مثلا:" كنت أعتقد أن الدالة هي ....., الآن أنا أعرف أن الدالة هي .....".

- **حواث تتعلق بالعملية (بالتقدم) (Process prompts):**

حواث "العملية" تهيئ للطلاب فرصا لكي يفكروا تفكيرا انعكاسيا بكيفية اختيارهم أو سبب تفضيلهم استراتيجية حل معينة على غيرها. كذلك يمكنهم أن يفكروا ويكتبوا عن الطرق التي يتعلمون بها. بعض حواث العملية يمكن أن تهتم بعادات التعلم. مثال على حاث من هذا النوع هو:"أنت تعرف على الأقل 4 طرق لحل معادلتين بمتغيرين. ما هي طريقتك المفضلة للحل؟ لماذا؟". مثال آخر هو " القسم الأهم في حل مسألة هو . . ." مثال على حاث يهتم بعملية التعلم هو "عندما أدرس لأحل لغزا جبريا, أنا . . ."

- **حواث شعورية / تصرفية (Affective/attitudinal prompts):**

الحواث الشعورية/ التصرفية تهتم بكيفية نظر الطلاب إلى أنفسهم كرياضيين, كطلاب رياضيات, وحالين للمسائل. أمثلة على حواث من هذا النوع هي:" أرسم صورة لرياضي, وصف ماذا يفعل الرياضي", "أنا أحب/لا أحب حل مسائل كلامية لأن ...".

McIntosh (1991) قسمت الكتابة الرياضية من نوع "سجل" والذي اعتبرناه هنا جزءاً من الكتابة الرياضية من نوع "مجلة" لثلاثة أقسام:

- **مهمة مفتوحة:** وهي مهمة غير معروف من صفاتها غير موضوعها, ويستطيع الطالب أن يكتب بها ما يشاء. يمكن للمعلم أن يضع موضوع المهمة ويترك للطالب أن يكتب بها متى يريد وما يريد. أمثلة على مهمة كهذه هي: "الآن أدرك أن . . .", و " كيف تعتقد أنك فعلت ذلك؟". يمكن للمعلم أن يوزع على الطلاب مسبقا أوراقا بها حواث من هذا النوع ليكتب الطالب بها متى مر بتجربة شبيهة بموضوع الحاث.

- **مهمة موجهة:** تقول McIntosh (ص. 424) ان الامثلة على مهمة من هذا النوع تضم الاجابة على صيغ محضرة مسبقا لاسئلة تعتمد على مفهوم أو فكرة قدمت مؤخرا.

- **مهمة محددة:** تضم الامثلة على المهام المحددة, حسب McIntosh (ص. 424), بالاعتماد على Evans (1984) ثلاثة أنواع: "كيف", "تعاريف" و "حل

الاخطاء". مهام "كيف" تطلب تفسيرا كلاميا عن كيفية القيام بأمر ما؛ تبسيط دالة جبرية, تنصيف زاوية, حل مسألة نسبة, وهكذا. مهام "التعاريف" تطلب من الطلاب أن يكتبوا تعريفهم أو تفسيرهم لمصطلحات تعلموها في صف الرياضيات. مهام "حل الأخطاء" تطلب من الطلاب تفسير خطأ تعرفوا هم أو معلمهم عليه.

McIntosh (1991, ص. 430–431) تقترح إعطاء الطلاب تعليمات عن الكتابة من نوع مجلة تحوي معلومات عن "من سيكتب بمجلتك؟","ماذا يجب أن تكتب بمجلتك؟", "متى يجب أن تكتب بمجلتك؟","أين يجب أن تكتب بمجلتك؟","لماذا يجب أن تكتب بمجلتك؟","كيف يجب أن تكتب بمجلتك؟". المعلومات المفصلة موجودة في ملحق (3).

النوع الثاني من الكتابة الرياضية / الكتابة العارضة:

هدف الكتابة الرياضية العارضة الرئيسي, حسب McIntosh (1991, ص. 430), آخذة ذلك من Harris و Hodges (1981), هو التوضيح والتفسير, وهما يصفان العرض الجيد بأنه عرض واضح في فكرته, مرتب جيدا, ويمكن فهمه. مكتبة العلاقات اللغوية (1999) تصف الكتابة العارضة ككتابة هدفها توصيل المعلومات أو تفسير ما هو صعب فهمه. من الجدير بالذكر أن هناك مصادر عن الكتابة العارضة تعتبر الكتابة العارضة كل ما يعرض موضوعا معينا أو يفسره؛ أنظر مثلا برنامج الكتابة العارضة للغة الإنجليزية التابع لجامعة ولاية كانساس في الموقع

http://www.ksu.edu/english/programs/expos/polpro.html .McIntosh (1991, ص. 431–432).

تقترح أن نبدأ الكتابة العارضة في صف الرياضيات بالصورة التالية: في البداية نتصل (المعلم أو الطلاب) بكتاب رياضيات أو تربية رياضية ممن يكتبون في المجلات العلمية أو الجرائد او المجلات الاجتماعية, بواسطة التلفون أو رسالة, ونطلب منهم أن يأتوا لصف الرياضيات ويتحدثوا عن كتابتهم, أن يبعثوا أمثلة من كتاباتهم, أن يرسلوا أفكارا مفيدة للكتاب في ميدان الرياضيات, أو أن يشاركوا الصف في أية تجربة يعتبرونها مهمة بالنسبة للكتابة الرياضية. عندما نجمع هذه المعلومات ندمجها بالمنهاج أو نضعها على لوحة

التشرة الرياضية في الصف. بعدها يستطيع المعلمون أن يصمموا مهاما ملائمة للكتابة العارضة بحيث ترتبط بمحتوى المساق.

النوع الثالث من الكتابة الرياضية / الكتابة الخلاقة:

McIntosh (1991, ص. 432) تتحدث عن الكتابة الخلاقة في صف الرياضيات على أنها كتابة أدبية تتعلق بالرياضيات, وتقول إنه يمكن أن نشجع الطلاب على كتابة أشعار أو قصص عن مفاهيم أو أفكار رياضية. قصيدة Megan, وهي طالبة ثانوية, التي أرفقتها مع مشروعها الرياضي (Elliot, 1996, ص. 93), توضح ما تعنيه McIntosh بالكتابة الخلاقة في صف الرياضيات:

A point, a line, and a plane
An unfortunate, tragic shame
To be undefined
Throughout all time.
I'd hate to be a point, line or plane.
Pee-wee size
On a line
In space
Never defined
Total: 1 point
Planes
Labeled with a capital letter
A four sided figure
No thickness
Extends forever
Line
Intersects at times
No definition
Extend on

مصدر جيد عن الكتابة الخلاقة في صف الرياضيات هو مجموعة الرسائل عن هذا الموضوع في موقع الانترنت http://home.capecod.net/~tpanitz/discussions/poetry.html, ويحتوي على نقاش جرى بين معلمي رياضيات مارسوا الكتابة الخلاقة في صفوفهم.

تقسيم بديل لأنواع الكتابة الرياضية:

بعض الباحثين يقسمون الكتابة الرياضية بشكل يختلف عن التقسيم الذي وصفناه سابقا. من أشهر هذه التقسيمات التقسيم الذي قامت به Rose (1989), حيث قسمت الكتابة الرياضية إلى نوعين: الكتابة التعاملية والكتابة التعبيرية, حيث الكتابة التعاملية هي الكتابة التي تمكننا من الاعلام, الاقناع, أو الارشاد, وهي موجهة لجمهور, أما الكتابة التعبيرية فهي تهتم بعملية الكتابة وعملية التفكير. كل من النوعين الرئيسيين ينقسمان بدورهما إلى أنواع أخرى. الكتابة التعاملية تنقسم إلى: تلخيصات, أسئلة, تفسيرات, تعاريف, تقرير, مسائل كلامية, وظيفة فصلية, قصص, مشاريع, أسئلة مقال, كتب, أخذ ملاحظات وحوار. الكتابة التعبيرية تنقسم إلى: كتابة حرة, رسائل, قصاصة اعتراف, كتابة سيرة وكتابة مجلة.

تقسيم مختلف لأنواع الكتابة الرياضية:

بالإضافة إلى التقسيمات السابقة التي ذكرناها هناك من يقسم الكتابة الرياضية حسب معايير مختلفة. Birken (1989), مثلا, تقسم الكتابة الرياضية إلى الاقسام الاربعة التالية:

1. كتابة قصيرة داخل الصف. هذه الكتابة هي عادة تعبيرية أو غير رسمية.
2. مسائل رياضية والتي هي جزء من الوظيفة البيتية وتتطلب تفسيرا أو تحليلا, أو مهام في الوظيفة البيتية تتطلب كتابة انعكاسية عن مفهوم رياضي.
3. أسئلة عن مقال كجزء من امتحان.
4. تقارير تقنية رسمية (وهي من نوع الكتابة التعاملية).

وقت الكتابة الرياضية:

أحد الأسئلة المهمة بالنسبة للكتابة في صف الرياضيات هو متى نكتب في صف الرياضيات, وعندما نكتب كم من الوقت يمكن أن تستغرق الكتابة. هذا الأمر يختلف بين مرب وآخر: هناك مربون استعملوا الكتابة الرياضية مرتين في الأسبوع بشكل عام, ولكن الأمر كان متعلقا أكثر بالظرف الرياضي للصف (Nahrgang & Peterson, 1986, ص. 463) أما بالنسبة للوقت الذي يجب أن يخصص لكل مادة فان Nahrgang و Petersen تعتقدان أن ثلاث حتى سبع دقائق تكفي لكتابة المادة (ص. 463). Chapman (1996) تقول إنها استعملت الكتابة الرياضية مرتين في الاسبوع بشكل عام, أما وقت كل كتابة فهو متعلق بموضوع وأهمية الكتابة (ص.589).

بعض المربين يرون أن الكتابة يمكن أن تكون في أي جزء من الدرس. Elliott (1996) تقول إن بداية الدرس هي وقت جيد لإجابة الطلاب عن سؤال مراجعة أو للتحمية, مثل: "ناقش ماذا تعرف عن ...."؛ وسط الدرس هو وقت يستطيع به المعلم أن يطلب من الطلاب أن يكتبوا ليقيم معرفتهم المفهومية, أما نهاية الدرس فهي وقت جيد لأن يلخص الطلاب الدرس أو يكتبوا عن مصطلحات جديدة تعلموها (ص. 92). Lax (1989) يعتقد أن الكتابة الرياضية التي يكتبها الطلاب, مفسرين كل ما يكتبونه وفاحصين أفكارا رياضية, يجب أن تعطى كل الوقت الذي تحتاجه, لأن هذا سيؤدي إلى توفير رئيسي بالوقت في التعليم المستقبلي (ص. 253).

بعض المربين يعطون مهاما كتابية للطلاب كوظائف بيتية مثل Dougherty (1996) التي تعلل ذلك بأنها تريد أن يكون لدى الطلاب وقت كاف ليفكروا مليا ويعلقوا على النقاشات التي جرت في صف الرياضيات في نفس اليوم أو في اليوم السابق (ص. 557).

أمثلة عامة على الكتابة الرياضية:

نقدم للقارئ أمثلة عامة عن الكتابة الرياضية لتتكون لديه فكرة أوضح عما نتحدث عنه, ولكن لا بد له أن يرجع إلى مصادر أخرى لتتكون لديه فكرة أشمل عن الكتابة في صف الرياضيات. (كل الأمثلة مأخوذه من أدب الكتابة الرياضية المذكور في مصادر المقال, مع بعض التصرف).

كتابة الطالب:

- إذا جربت تجربة "الأها" أكتب عنها.
- إذا اكتشفت أنك أخطأت حاول أن تحلل لماذا أخطأت.
- ما رأيك في طريقة تدريس الرياضيات؟ هل ترى أنها يمكن أن تتحسن وكيف؟
- (قبل أو خلال الامتحان):

  كيف فعلت في الامتحان وما هو سبب ذلك؟
- (بعد الامتحان):

  بالاعتماد على نتيجة امتحانك, هل تعتقد بأن استراتيجية دراستك للامتحان ملائمة ولماذا؟ هل تعتقد أن استراتيجية دراستك اليومية ملائمة ولماذا؟
- الموضوع الذي نتعلمه الآن بالرياضيات مبني على ما تعلمناه هذه السنة (أو في السنة الفائتة). دعوني أفسر ماذا أعني . . . .
- أكتب مسألة كلامية تتعلق بالموضوع الذي تعلمناه, وفسر بالكلمات كيف نحلها.
- نقطة لم أكن أدركها وأنا الآن أدركها: سوف أحل من جديد أحد تمارين الوظيفة البيتية الأخيرة. الآن أعرف ما الخطأ الذي قمت به, وسأفسر ما أعرفه الآن وما لم أعرفه من قبل.
- أعتقد أن مفتاح الاداء الجيد في الرياضيات هو . . . .
- تعليق بالشعر أو بالنثر الأدبي على مواضيع رياضية أو مواضيع تتعلق بالتنفيذ الرياضي للطالب.

كتابة المعلم:

- كتابة حواث من أنواع مختلفة لحث الطالب على الكتابة الرياضية.
- إرشاد فردي للطالب يتعلق بكيفية الدراسة اليومية الملائمة له وكيفية الدراسة للامتحان.
- إرشاد الطالب إلى خطأ فعله والطلب منه أن يصححه ويفسر لماذا أخطأ.

أمثلة خاصة على الكتابة الرياضية مأخوذة من أدب الأبحاث:

نذكر هنا مصادر مهمة عن الكتابة الرياضية يمكن للقارئ أن يعود إليها ويطلع على الأمثلة الموجودة بها للكتابة الرياضية:

- Norwood و Carter (1994): يعطيان 8 أمثلة على كتابة رياضية يمكن أن يبدأ بها الطلاب كتابتهم الرياضية, كذلك يعطيان 9 أمثلة على الكتابة التفسيرية.
- Burchfield وآخرون (1993): يحتوي على أنواع مختلفة للكتابة الرياضية وأمثلة ملائمة. المقال موجود في الموقع
  http://www.woodrow.org/teachers/mi/1993/37burc.html .
- لجامعة نيوفاونلاند موقع عن الكتابة في صف الرياضيات عنوانه
  http://www.ucs.mun.ca/~mathed/t/rc/jour/JOURNAL.HTM يحتوي على أمثلة مختلفة للكتابة الرياضية, مقسمة حسب تقسيم Dougherty (1996) لأنواع الكتابة. الأمثلة مأخوذة من مصادر مختلفة.

صعوبات

معلمو الرياضيات وكذلك طلابها غير معتادين على الكتابة في صف الرياضيات؛ هم يعتقدون أن الرياضيات هي لغة الرموز ولا مكان للغة الطبيعية بها. McIntosh (1991, ص. 423) تصف ظاهرة رفض معلمي الرياضيات لدمج اللغة الطبيعية في صف الرياضيات بقولها:

" The teachers who are the most difficult to convince of the worth of writing as a normal part of their curriculum are mathematics teachers. The idea is so foreign to the majority of mathematics teachers at every level that even the mere suggestion is often met with derisive looks, rolled eyes, and a shaking head"

وتقتبس McIntosh عن Davison و Pearce (1988) اللذين يقولان واصفين نفس الظاهرة:

"The traditional view has been that students learn to write in English classes and to compute in mathematics classes and 'never the twain shall meet".

هذا الاعتقاد بعدم ملاءمة الكتابة لصف الرياضيات ما زال سائدا رغم مرور ما يزيد على العقدين من الاهتمام بالكتابة في صف الرياضيات. أغلب معلمي الرياضيات (وهذه ظاهرة عالمية) يقومون بجل مسائل وتمارين رياضية, على اللوح, دون كتابة كلمة واحدة. لذلك, استعمال الكتابة في صف الرياضيات قد تعترضه مقاومة من قبل معلمي وطلاب الرياضيات. حتى يقتنع المعلمون بأهمية وجدوى استعمال الكتابة في صف الرياضيات يجب أن يطلعوا على هذه الكتابة, أهميتها, أنواعها ونماذج منها, وهذا يمكن أن يتحقق عبر استكمالات المعلمين ومساقات ملائمة لطلاب كليات إعداد المعلمين وطلاب التربية الرياضية في الجامعات.

حتى يقدم معلم الرياضيات الكتابة الرياضية بشكل ملائم لصفه وليشجع طلابه على استعمال الكتابة كواحدة من طرق تعلمهم للرياضيات, وحتى لا يحبط هو نفسه إن استغرقت عملية إدخال الكتابية الرياضية لصفه وقتا أكثر مما يتوقعه, Norwood و Carter (1994, ص. 146–147) يقترحان مجموعة من الخطوات لتقديم الكتابة في صف الرياضيات (وهي خطوات تنظم عمل المعلم أيضا). فيما يلي وصف لهذه الخطوات بالاعتماد أساسا على Norwood و Carter, مع تغيير اقتضاه ما هو موجود في مصادر أخرى:

1. قدم استعمال الكتابة للطلاب في بداية السنة وعرفهم على أن الكتابة هي فعالية متوقعة في صف الرياضيات والتي يمكن أن تؤدي الى فهمهم الرياضيات بصورة أفضل, وتقدم للمعلم صورة أفضل عن فهمهم للرياضيات.
2. حضر كراسة للمجلة يستطيع الطلاب أن يضعوا بها كتاباتهم. أشرك الطلاب في تصميم الكراسة, مثلا خذ رأيهم في تصميم غلاف المجلة واجعلهم يقدمون اقتراحات لرسوم تظهر في الغلاف.
3. قرر كم من الوقت تستغرق الكتابة في صف الرياضيات كل يوم.
4. قل للطلاب بأنهم يستطيعون الكتابة إلى شخص يعرفونه. هذا سيجعلهم يكتبون أكثر وبتفصيل أكبر.

5. أخبر طلابك كيف تتوقع أن تكون كتابتهم, واخبرهم كيف ستقوّم هذه الكتابة. أعطهم مثالا على كتابة رياضية, ويمكنك أن تعطى أكثر من مثال لتبين أنواع الكتابة المختلفة.
6. أجب على كتابة الطلاب بشكل مستمر حتى يعرف الطلاب أن ما يكتبونه يقرأ بالفعل. قراءة خمس مجلات كل ليلة هو أمر معقول. الوقت المكرس للقراءة والرد لن يذهب هباء لأن غنى المعلومات سيفيدك في النهاية وسيفيد طلابك.
7. لا تيئس وكن صبورا إذا لم يشترك كل الطلاب في الكتابة. لا بد من مرور وقت كاف حتى يعتاد الطلاب على الكتابة الرياضية وعلى توقعاتك من هذه الكتابة.
8. شارك الطلاب في الكتابة. في بعض الأحيان أطلعهم بشكل جماعي على كتابتك.
9. اعرض, بموافقة الطلاب, كتابتهم التي تظهر الصفات المطلوبة للكتابة, مثل تفسير واضح, دقيق, ومسائل كلامية خلاقة.

مصادر عن الكتابة في صف الرياضيات في الكلية أو الجامعة:

فيما سبق تحدثت عن الكتابة في صف الرياضيات بشكل عام, ولم أهتم بالكتابة بشكل محدد عن صف الرياضيات بالكلية أو الجامعة. كل أنواع الكتابة التي ذكرتها تلائم طلاب الكلية والجامعة, كذلك يمكن الادعاء أن كل الوظائف التي ذكرتها للكتابة الرياضية بشكل عام هي وظائف ملائمة للكتابة الرياضية في الكلية والجامعة أيضا. في النهاية أرى مهما أن أضع هنا مصادر مهمة عن الكتابة الرياضية في الكلية والجامعة. تحتوي المصادر, فيما تحتويه, على مهام كتابية, يمكن أن يستفيد منها معلم الرياضيات في الكلية والجامعة, بحيث يعطيها لطلابه أو يحضر مهاما كتابية شبيهة بها أو مختلفة عنها (بعد أن يعتاد استعمال المهام الكتابية في صفه).

الكتابة في الرياضيات:

http://www.fandm.edu/Departments/Mathematics/writing_in_math/writing_index.html#Started

مهام كتابية في حساب التفاضل:

http://www2.wheatonma.edu/academic/academicdept/MathCS/faculty/tratliff/writing/home.html

دليل الكتابة في صف الرياضيات

:http://www.fandm.edu/Departments/Mathematics/writing_in_math/secl

توصيات واتجاهات بحث مستقبلية:

الاهتمام بالكتابة الرياضية في صف الرياضيات هو اهتمام جديد نسبيا, وهو اهتمام غير مقصور على مرحلة تعلم معينة, فالباحثون والمربون المهتمون بالكتابة الرياضية يخبرون عن ملاءمته لكل مراحل التعلم؛ من الحضانة حتى الكلية والجامعة. ما لم يخبرنا به باحثو الكتابة الرياضية هو وجهة نظر طالب الرياضيات بالكتابة الرياضية كرأي مستقى منه مباشرة. أحد المصادر التي وجدناها, والذي يذكر بلمحة رأي طالبة واحدة في الكتابة الرياضية, هو مقال Leah Richards, Measuring Things in Words: Language for Learning" Mathematics", والذي تقتبس فيه Richard رأي احدى طالباتها في الكتابة الرياضية, وهي ميجان (11 سنة):

Language helps our maths by being able to write, use words, use symbols, being able to read and listen. We share our ideas, challenge ourselves, maybe help others and correct them, be able to have our own opinion. It helps explain things, making discoveries, understanding things, setting goals for yourself, learning, knowing. Richards (1990).

برغم صغر عمرها, وبسبب دمج الكتابة في صفها, تعي ميجان كل الوعي أهمية الكتابة الرياضية واللغة في تعلم الرياضيات.

قليلة هي المعلومات المتوفرة في الابحاث عن كيفية نظر الطلاب إلى الكتابة الرياضية وهي بحاجة إلى انتباه من قبل الباحثين المهتمين بالكتابة في صف الرياضيات.

موضوع آخر جدير بالاهتمام هو الكتابة الرياضية في الكليات والجامعات, وهو موضوع بدأت الاهتمام به جامعات أوروبا وأمريكا, حيث تلزم الجامعات طلاب التربية الرياضية بها بتعلم مساقات كتابة رياضية. كلياتنا وجامعاتنا ما زالت غير واعية لأهمية الكتابة الرياضية وقد حان الوقت لتفعل ذلك. الاهتمام يتحقق عبر توفير مساقات استكمال للمعلمين بالفعل بالمدارس وتوفير مساقات كتابة رياضية لطلاب كليات إعداد المعلمين وكليات التربية في الجامعات, وجنبا إلى جنب مع المساقات الخاصة بالكتابة الرياضية, على معلمي الرياضيات في الكليات والجامعات أن يبدأوا هم أنفسهم بدمج الكتابة الرياضية في مساقاتهم حتى يعتاد طلاب الرياضيات (المعلمون المستقبليون) على الكتابة الرياضية ويدركوا أهميتها, وعندها ستكون إمكانية دمجهم لها في مدارس التطبيق وبعد أن يتخرجوا إمكانية كبيرة.

References:

Burchfield, P.C; Jorgensen, P.R.; McDowell, K.G.; Rahn, J., (1993). **Writing in the Mathematics Curriculum**.
http://www.woodrow.org/teachers/mi/1993/37burc.html.

Clarke, J. C., Waywood, A. and Stephens M., (1993). **Probing the Structure of Mathematical Writing**. Educational Studies in Mathematics, 25, 235-250.

Chapman, K. P. (1996). Journals : Pathways to thinking in second-year algebra. **Mathematics Teacher**, 89, 588 - 590.

Davison, D. M. & Pearce, D. (1988). *Using writing activities to reinforce mathematics instruction.* **Arithmetic Teacher**, 35, 42-45.

Dougherty, B. J. (1996). The write way : A look at journal writing in first-year algebra. **Mathematics Teacher**, 89, 556 - 560.

Elliott, W. L. (1996). Writing : A necessary tool for learning. **Mathematics Teacher**, 89, 92 - 94.

Emig, J., (1977). **Writing as a mode of Learning**. College Composition and Communication, 28, 122-28.

Evans, C. S. (1984). Writing to Learn in Math. **Language Arts**, 61, 828-835.

Gordon, C. J., & Macinnis, D. (1993). Using journals as a window on students' thinking in mathematics. **Language Arts**, 70, 37 - 43.

Harris, T. L., & Hodges, R. E. (Eds.). (1981). **A dictionary of reading and related terms**. Newark, DE: International Reading Association.

Lax, A. (1989). **They think, therefore we are**. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), Writing to learn mathematics and science (pp. 249-265). New York : Teachers College Press.

Kennedy, M. L., (1980). **Reading and Writing: Interrelated Skills of Literacy on the College Level**, Reading World, 20, 121-41.

McIntosh, M. E. (1991). No time for writing in your class? **Mathematics Teacher**, 84, 423 - 433.

Miller, D., (1991). Writing to Learn Mathematics. **Mathematics Teacher**, 84(7), 516-521.

Nahrgang, C. L., & Petersen, B. T. (1986). Using writing to learn mathematics. **Mathematics Teacher**, 79, 461 - 465.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and Standards for School Mathematics: Reasoning and Proof Standard for Grades 9–12.

Norwood, K. S., & Carter, G. (1994). Journal writing: An insight into students' understanding. **Teaching Children Mathematics**, 1, 146 - 148.

Richards, L., (1990). "Measuring Things in Words": Language for Learning Mathematics. **Language Arts**, 67 (1), 14-25.

SIL International, (1999). **LingualLinks Library**. http://www.sil.org/lingualinks/literacy/ReferenceMaterials/GlossaryOfLiteracyTerms/WhatIsExpositoryWriting.htm.

Watson, M., (1980). Sharing Teaching Ideas: Writing Has a Place in a Mathematics Class. **Mathematics Teacher**, 73, 518-519.

ملحق (1):

حل معادلتين بمتغيرين بطريقة التعويض مع استعمال بسيط للغة الطبيعية
(الطالب يستطيع أن يستعمل كلمات أخرى أو يزيد على الكتابة كما يريد)

$3x + 2y = 4$ (I)

$2x + y = 3$ (II)

نجد قيمة y من (II):

$y=3-2x$ (*)

نعوض قيمة y من (*) في (I):

$3x + 2(3-2x)=4$

$3x + 6 -4x = 4$

$-x + 6 = 4$

$-x = -2$

$x = 2$

نعوض قيمة x في (*):

$y = 3 – 2 (2) = -1$

لذلك الحل هو: $x = 2, y = -1$

ملحق (2):

حل معادلتين بمتغيرين بطريقة التعويض مع استعمال للغة الطبيعية

(الطالب يوضح طريقة حله)

$3x + 2y = 4$ (I)

$2x + 2y = 2$ (II)

هذا التمرين لم نأخذ مثله من قبل, كل التمارين التي أخذناها تحتوي على معادلة بها y على جهة وحدها, كنت آخذ قيمة y وأعوضها في المعادلة الأخرى. كيف يا ترى أحل هذا التمرين؟

فكرت كثيرا كيف أحل هذا التمرين ولم أعرف. يبدو هذا التمرين صعبا جدا, هل يحل؟

خرجت من البيت إلى الساحة ولعبت بالكرة, ولكني كنت مشغول البال بالتمرين غير المحلول, وفجأة خطرت لي فكرة: هل يمكن تحويل إحدى المعادلتين إلى معادلة بسيطة؟ أي إلى معادلة بها y على أحد الطرفين وحدها؟ تركت الكرة ودخلت للبيت, وأخذت أنظر إلى المعادلتين. ماذا أفعل؟ أها .. لماذا لا أبقي الوايات في إحدى المعادلتين على جهة وحدها ثم أقسم على 2؟

وهكذا فعلت. أخذت معادلة (II) وأجريت عليها ما فكرت به:

$2x + 2y = 2$

$2y = 2 - 2x$

نقسم على 2 وينتج: $y = 1 - x$

وعندها نعوض قيمة y في المعادلة الأولى ونكمل كما اعتدنا في السابق:

$3x + 2(1-x) = 4$

$3x + 2 - 2x = 4$

$x + 2 = 4$

$x = 2$

نعوض قيمة x في معادلة ملائمة لنجد قيمة y.

$y = 1 - 2$

$y = -1$

ولذلك فالحل هو:

$x = 2, y = -1$

ملحق (3)

صفحة معلومات للطلاب نوزعها على الطلاب عندما نعرفهم على الكتابة الرياضية من نوع مجلة (McIntosh, 1991, ص. 431)

المجلة الرياضية

- **من** سيكتب في مجلتك؟

أنت يجب أن تكتب.

- **ماذا** ستكتب في مجلتك؟

كلمات جديدة أو أفكار جديدة أو قوانين جديدة أو مفاهيم جديدة تعلمتها.

أفكار عميقة فكرت بها.

أشياء تعجبت منها, تأملات, مسائل للحل.

تفكير انعكاسي عن الصف.

أسئلة يمكن الاجابة عليها أو لا يمكن الاجابة عليها.

اقتراحات للكتابة.

- **متى** ستكتب في مجلتك؟

بعد الصف كل يوم.

عندما تحضر, تقرأ, أو تدرس للصف.

كل وقت تنفتح بصيرتك (تجربة الأها) أو تفكر بسؤال ما.

- **أين** يجب أن تكتب في مجلتك؟

في كل مكان, لذلك أبق مجلتك معك عندما يمكن ذلك.

- **لماذا** يجب أن تكتب في مجلتك؟

الكتابة تسجل أفكارا يمكن أن تنساها إن لم تكتبها.

يمكنك أن تقارن في المستقبل بين كتاباتك المختلفة وتلاحظ تطورك.

سيسهل ذلك تعلمك, حلك للمسائل, كتابتك, قراءتك, ونقاشك في صف الرياضيات.

- **كيف** يجب أن تكتب في مجلتك؟

بجمل متدفقة, طويلة ومثيرة مع ترقيم ممتاز وهجئة ممتازة وبخط ممتاز.

أو: بكلمات قليلة والتي تعبر عن أفكارك, بعبارات قصيرة, بواسطة رسم تخطيطي, بواسطة أعداد, بواسطة رسم بياني أو تخطيطي. بجمل

תקציר

מחנכים מתמטיים וחוקרים בחינוך המתמטי מתעניינים, בשני העשורים האחרונים, בכתיבה בכיתת המתמטיקה (שילוב השפה הטבעית בכתיבת התלמידים). הם מדווחים שכתיבה זו עוזרת למורים בהוראתו: היא משפרת את התקשורת בין המורה לבין תלמידיו וזה מאפשר לו להעריך יותר טוב את המצב המתמטי של תלמידיו ולשנות אלמנטים מסוימים בהוראתו אם צריך או לדאוג יותר לאחד או לכמה מתלמידיו. הכתיבה המתמטית של התלמידים והמורה מאפשרת מצב אידיאלי של קשר בין המורה וכל אחד מתלמידיו, כאשר המורה עונה על כתיבת תלמידו בהערה או בשאלה שיוזמת דיון בפעולות התלמיד המתמטיות או ברעיון מתמטי מסוים. כתיבה מתמטית עוזרת גם לתלמיד שכותב אותה כי הוא נהיה מודע ללמידתו והבנתו של המתמטיקה, ויכול לשנות באופני למידתו אם יש צורך בזה.

מאמר זה מתאר את חשיבותה של הכתיבה המתמטית ואת הפונקציות השונות שלה. כמו כן הוא מתאר את הסוגים השונים של כתיבה זו ונותן דוגמאות עליה. המאמר מצביע על מקורות חשובים שיכולים לסייע למורי המתמטיקה כדי לשלב את הכתיבה המתמטית בכיתותיהם. כמו כן הוא מצביע על התנאים שהופכים את שילוב הכתיבה בכיתות המתמטיקה אצלנו לשילוב נוח יחסית ולבסוף מצביע על כיווני מחקר עתידיים.ד