الأعداد المركبة
(طريقة تعليم بديلة)

علي عثمان

اعرض في هذا المقال طريقة تعليم بديلة لموضوع الأعداد المركبة تختلف عن الطريقة السائدة لتعليم هذا الموضوع في المدرسة الثانوية لطلاب تخصص 5 وحدات. حسب الطريقة التي اعرضها يعتبر كل عدد مركب متجها في المستوي ولكل عمليه, مثل الجمع,الضرب, القيمة المطلقة والمرافق مفهوم هندسي. حسب طريقة التعليم السائدة يعتبر العدد المركب شيئا مركبا من جزأين أحدهما عدد حقيقي والآخر هو "عدد خيالي". أما العدد الخيالي فهو الجذر التربيعي لعدد سالب.
على الرغم من إصرار المعلم من قبل على التأكيد أن لا جذر تربيعي للعدد السالب الا انه في هذه المرحلة يلزم طلابه في ضرورة قبول هذا.
حسب رأيي فان طريقة التعليم هذه تظهر للطلاب أن التعمق في موضوع الرياضيات يجري في مسارات خيالية لا تمت للواقع بصله . وهو ما لا يحفز الطلاب على الاستمرار في تعلم الموضوع.
كذلك فان قبول الطلاب لأقوال المعلم دون نقاش وجدال هو مؤشر على الطريقة الألغوريثميه في التعليم.
يسرع المعلم بتعريف العمليات وكيفية إجراء الحساب ويباشر الطلاب بالتنفيذ.
ذكرت الدوافع لكتابة المقال عسى ان تكون محفزا للمعلم على قبول الطريقة التي اقترحها.

<u>الدوافع:</u>

عندما يسأل طالب تخصص أربع وحدات صديقه طالب تخصص خمس وحدات (في موضوع الرياضيات) عن المادة التي يدرسها في الوحدة الخامسة، يجيبه بأنه يتعلم موضوع الأعداد المركبة. وعندما يسأله عن هذه الأعداد يقول له صديقه أنه تعلم العدد i وهو يساوي $\sqrt{-1}$. يجادله صديقه بقوله أن $\sqrt{-1}$ غير معرّف. يجيبه الآخر: نعم إنه عدد خيالي.

يقول طالب 4 وحدات: ماذا تقصد! هو عدد غير واقعي. فهو ليس عدداً.

طالب 5 وحدات: هو حل للمعادلة $x^2 + 1=0$.

طالب 4 وحدات: لكن $x^2 + 1$ أكبر من صفر لكل x لذلك فلا يوجد حل لهذه المعادلة.

طالب 5 وحدات: نفرض أنه يوجد حل ونرمز له i وهو عدد غير حقيقي.

طالب 4 وحدات: يبدو أنكم تتعلمون أشياء غير منطقية.

طالب 5 وحدات: ألا تعلم بأن معظم الاختراعات التي ننعم بنتائجها كانت أحلاماً خيالية في أذهان الناس السابقين وها هي واقع نعيشه.

طالب 4 وحدات: أتحلمون بعدد ما هو بعدد !!

طالب 5 وحدات: قل لي ما هو العدد الحقيقي؟

طالب 4 وحدات: هو نقطة على محور الأعداد.

طالب 5 وحدات: أليست النقطة شيئاً خيالياً ! فلا طول لها ولا عرض ولا ارتفاع. فكيف اقتنعت بها؟

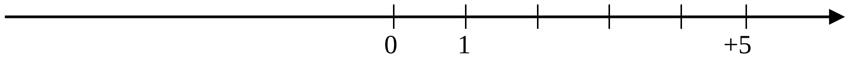
طالب 4 وحدات: لقد علمونا هذا واستعملناه في التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية.

طالب 5 وحدات: وأنا كذلك علموني i ففهمته وعلمونا الأعداد المركبة وهو موضوع سهل. ولقد سمعت أن الرياضيات العالية معظمها أشياء خيالية.

كثير من المعلمين في المرحلتين الثانوية والإعدادية يعتبرون العدد الحقيقي أنه نقطة على محور الأعداد. فكيف باستطاعتهم جمع نقطتين أو ضربهما! وكيف يفسرون أن نقطة المنتصف للقطعة $[a,b]$ هي $\frac{1}{2}(a+b)$!.

عدد حقيقي هو متجه على محور الأعداد (أو يوازيه). ونذكر أن كل متجهين متساويين بالطول وبالاتجاه متساويان. لذلك فإن كل عدد حقيقي يساوي متجهاً على محور الأعداد يبدأ في الصفر.

نرمز لنقطة نهاية المتجه باسم العدد الحقيقي. $+5$ هو المتجه الذي يبدأ في 0 وطوله 5 وحدات ويتجه باتجاه اليمين.



نرمز لنهايته 5+. النقطة 5+ هي نهاية العدد الحقيقي 5+. توجد دالة $(1-1)$ وعلى بين لأعداد الحقيقية والنقاط الواقعة على محور الأعداد. النقطة 5+ ليست هي العدد 5+ وإنما هي النقطة التي ينتهي فيها العدد 5+.

من الحوار الذي وصفته ومحادثات مع طلاب قابلتهم لا أرى أن طريقة تعليم الأعداد المركبة بهذه الطريقة تحفز الطالب على مواصلة تعليمه العالي في تخصص الرياضيات.

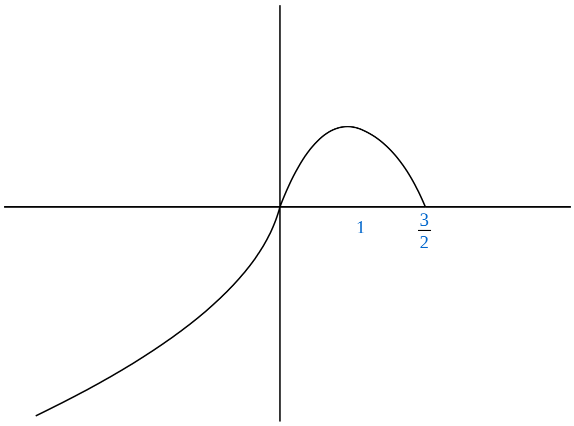
قضية تعليمية:

مسكين ذلك المعلم الذي نبه طلابه ألى أن $\sqrt{1}=1$ وليس ± 1 وأن $\sqrt{25}=5$ وليس ± 5. وأن لكل $a>0$، $\sqrt{a}$ هو العدد الموجب الذي تربيعه يساوي a . أي أن $\sqrt{a}$ هو الحل الموجب للمعادلة $x^2=a$. وبسبب كثرة الأخطاء التي وقع طلابه فيها طلب من أحد طلابه أن يعلق على الحائط:

إذا كان a<0 فإن $\sqrt{a}$ غير معرّف
$\sqrt{0}=0$
إذا كان a>0 فإن $\sqrt{a}$ هو الحل الموجب للمعادلة $x^2=a$

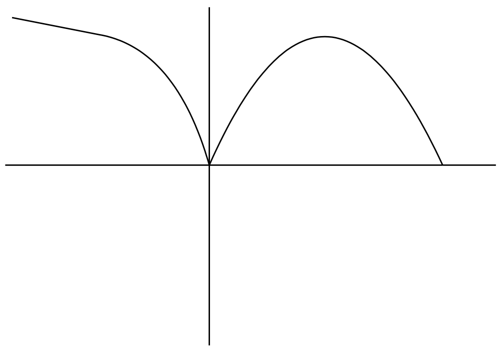
وذلك لأن $y=\sqrt{x}$ هي دالة مجال تعريفها $R+$.

بعد فترة من الزمن جاء دوره ليبحث الدالة $f(x)=\sqrt{3x^2-2x^3}$ ، استجاب لإلحاح طلابه. اقترح أحد الطلاب أن يكتب الدالة بشكل ابسط: $f(x)=x\sqrt{3-2x}$. بحثوا الدالة سوية وتوصلوا إلى أن النقطة *1* هي نقطة نهاية عظمى وحصلوا على الرسم البياني:



انتبه أحد الطلاب إلى أنه لا بدّ من وجود خطأ. فهو يعرف أن هذا الرسم يمثل دالة تحصل على قيم سالبة ولكن $\sqrt{a} > 0$ لكل $a>0$ قال ملاحظته وساد جو من الاستغراب وبعض الفوضى في الصف. طلب المعلم من طلابه أن يكتشفوا الخطأ وانتهت الحصة. إن الخطأ الذي حصل هو اعتبار $x = \sqrt{x^2}$. فإن هذا غير صحيح والصحيح هو أن $|x| = \sqrt{x^2}$. ولهذا الأمر نبه المعلم طلابه.

الرسم البياني الصحيح هو:



وفي اليوم التالي بدأ المعلم بتعليم موضوع الأعداد المركبة. حدثهم عن تاريخ تطور الأعداد. فقد عرفت الأعداد الصحيحة السالبة حتى يكون حل لكل معادلة من الصورة $x + a = 0$. وعرفت الأعداد النسبية حتى يكون حل لكل معادلة من الصورة $ax + b = 0$، حيث أن a وb صحيحان. وعرفت الأعداد الحقيقية بعد اكتشاف أن $\sqrt{2}$ غير نسبي. وحتى يكون هناك حل لمعادلة من الصورة $x^2 = a$ عندما $a>0$.

هل يوجد حل للمعادلة $x^2+1=0$ ؟ يجيب الطلاب أنه لا يوجد لها حلّ ويفسرون الأمر بشكل معقول.

يقول المعلم أننا سنوسع عالم الأعداد حتى يكون حل لهذه المعادلة. $x^2+1=0$ (تكافئ المعادلة $x^2=-1$) . العدد الذي تربيعه -1 نرمز له i . أي أن $i=\sqrt{-1}$.

يحاوره بعض طلابه. كيف تقول "العدد" فهو غير موجود؟

المعلم: عدد خيالي إنه ليس عدداً حقيقياً وهو يحقق $i^2=-1$.

أحد الطلاب: على افتراض أنه يوجد حل فإن المضاد له هو أيضاً حل.

المعلم: لأحدهما نرمز i . أي أن $i=\sqrt{-1}$.

طالب: فهمت! أي أن i هو الجذر الموجب للعدد *-1*.

المعلم: كلا i ليس موجباً.

طالب: إذاً فهو سالب. فلماذا لا نرمز لـــ $-\sqrt{-1}$ بـــ i.

المعلم: i ليس سالباً وليس موجباً ، هو ليس عدداً حقيقياً .

طالب:لأيهما نرمز بـــ i للعدد أو للمضاد؟

المعلم: لأحدهما. سنعرف الأعداد المركبة الآن ....

الحمد لله أن الدروس تنتهي والطلاب يريدون النجاح في الامتحان.

الأعداد المركبة:

اقترح تعليم المادة بعد أن يعرف الطلاب المتجهات في المستوى R^2 . نعلم أن كل متجه*(a,b)* هو السهم الذي يبدأ في النقطة *(0, 0)* ويتجه إلى النقطة *(a,b)* وينتهي فيها، وهو يساوي مجموع المتجهين *(0,b)* و *(a,0)* . أي أن *(a,b) = (a,0) + (0,b)* . المتجه *(a,0)* هو المتجه على المحور الأفقي الذي يبدأ في النقطة *0* على المحور الأفقي ويتجه إلى

النقطة a على المحور الأفقي وينتهي فيها. فنستطيع أن نستبدل $(a\ 0)$ بـــ a لأجل التبسيط.

من الممكن أن نشرح ذلك بصورة أخرى، على النحو التالي:

مثلاً $(5,\ 0)$ هو المتجه $5(1,\ 0)$. لو رمزنا لـــ $(1,\ 0)$ بالسهم$\rightarrow$ فإن$\rightarrow$ $5\cdot=(5,\ 0)$ لأجل البساطة نسجلها $+5$ أي أن $+5 = (5,\ 0)$.

أما المتجه $(-5,\ 0)$ فهو المتجه $5\cdot(-1,\ 0)$. ولو رمزنا للمتجه $(-1,\ 0)$ بالرمز$\leftarrow$ فإن $\leftarrow 5\cdot=(-5,\ 0)$ ولأجل البساطة نرمز لهذا بالرمز -5. أي أن $-5 = (-5,\ 0)$.

وبشكل عام: المتجه$(a,0)$ نستطيع أن نستبدله بـــ $|a|+$ إذا كان $a>0$ وبـــ $-|a|$ إذا كان a سالباً. وببساطة أكثر نستبدل المتجه $(a,0)$ بـــ a .

نأتي الآن لمحاولة كتابة المتجه $(0,b)$ بصورة أبسط:

مثلاً المتجه $(0,\ 5)$ هو المتجه $5\cdot(0,\ 1)$. $(0,\ 1)$ هو المتجه على المحور العمودي الذي يبدأ في 0 ويتجه إلى النقطة $(0,\ 1)$ وينتهي فيها. نرمز له بـــ $\uparrow$. لذلك فإن المتجه $(0,5) = 5.\uparrow$ من غير الممكن أن نستبدله بـــ $+5$ لأننا أصبحنا نعلم ما هو مفهوم المتجه $+5$. نستبدل المتجه$\uparrow$ بالحرف i لأجل البساطة. لذلك نستطيع كتابة المتجه $(0,\ 5)$ بطريقة أخرى وهي $5i$.

حيث أن i هو المتجه$\uparrow$ وهو $(0,\ 1)$. بما أننا نعرف أن المتجهات الواقعة على المحور الأفقي هي الأعداد الحقيقية فإننا نسمي المتجهات الواقعة على المحور العمودي أعداداً خيالية. (على أساس أن الكلمة خيالي هي عكس الكلمة حقيقي).

وهكذا نستطيع أن نكتب: $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a.(1,0) + b(0,1)$

$= a + bi$

أي أن: $(a,b) = a + bi$

انتبه إلى أننا قد استبدلنا العبارة "المتجه $(a,0)$ ".

بالعبارة "العدد a " واستبدلنا العبارة "المتجه $(0, b)$".
بالعبارة "العدد bi ".
نستبدل الآن العبارة "المتجه (a,b) " بالعبارة "العدد $a+bi$ ".
العدد $a+bi$ هو عدد مركب من جزأين a وهو الجزء الحقيقي (المركبة الأفقية) و bi وهو الجزء الخيالي (المركبة العامودية). العدد $a+bi$ يسمى عدداً مركباً.

العدد المركب هو متجه في المستوى R^2 .

إذا كان a عدداً حقيقياً فنستطيع تسجيله $a+0.i$ ذلك فإن كل عدد حقيقي يعتبر أيضاً عدداً مركباً جزؤه الخيالي صفراً.

القيمة المطلقة للعدد المركب $a+bi$:

بما أن العدد المركب $a+bi$ هو المتجه $(a,\ b)$ فإننا نعرف القيمة المطلقة لــ $a+bi$ والتي نرمز لها $|a+bi|$ أن تكون طول المتجه $(a,\ b)$ أي أن :

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

مضاد لعدد مرّكب: مضاد المتجه (a, b) هو المتجه $(-a,- b)$ لذلك فإن مضاد العدد $a+bi$ هو العدد $-a+(-b)i$ (أو: $-a - bi$)

عملية الجمع على الأعداد المركبة: مجموع عددين مركبين هو محصلة المتجهين وهو يساوي قطر متوازي الأضلاع الذي ضلعان من أضلاعه هما المتجهين ويبدأ في نقطة الأصل. لذلك: $(a+bi) + (c+ di) = (a+c) + (b+d)i$

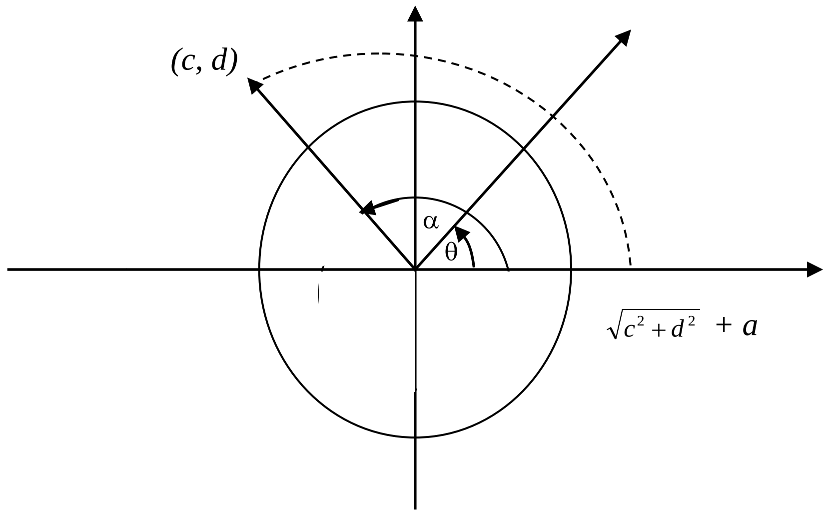
نلاحظ أن لعملية الجمع يوجد مفهوم هندسي.

نأتي الآن ألــ تعريف عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة.

التمثيل القطبي للعدد المركب

ليكن $a>0$. عندما نقوم بإدارة المتجه a بزاوية θ بعكس اتجاه عقارب

الساعة حول النقطة O.



فإننا نحصل على متجه جديد طوله يساوي a ويصنع زاوية θ مع المتجه a (أو يصنع زاوية θ مع الاتجاه لمحور x كما هو متبع في الكتب). نقطة تقاطع هذا لمتجه مع دائرة الوحدة هي $(cos\theta , sin\theta)$. لذلك فإن هذا المتجه يساوي $a(cos\theta , sin\theta)$. أي أنه يساوي $(acos\theta ,asin\theta)$. وبالعكس فإن كل متجه (c , d) ناتج عن دوران المتجه $\sqrt{c^2+d^2}$ حول O بزاوية معينة α.

لذلك فإن: $(c, d) = \sqrt{c^2+d^2}\cdot(cos\alpha, sin\alpha)$.

لذلك فإن: $c+di=\sqrt{c^2+d^2}\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot i)$

α تسمى تأثير العدد $c + di$

الزاوية α ، $0\le\alpha\le360$ هي الزاوية التي تحقق الشرطين:

$$\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} \quad \text{وَ} \quad \sin\alpha=\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

مثال: $1+\sqrt{3}i=2(\cos60^\circ+\sin60^\circ\cdot i)$

مثال: $5 = 5 \cdot (\cos 0^{\circ} + \sin 0^{\circ} \cdot i)$

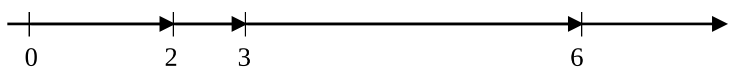
مثال: $4 = 4 \cdot (\cos 180^{\circ} + \sin 180^{\circ} \cdot i)$

نلاحظ أن تأثير كل عدد موجب هو 0° بينما تأثير عدد سالب هو 180° .

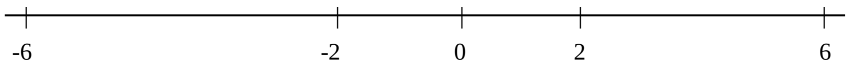
لكل عدد مركب يوجد تمثيل قطبي $r(\cos\theta + \sin\theta \cdot i)$ بحيث أن r هو القيمة المطلقة للعدد المركب و α هي الزاوية المحصورة بين المتجهين r+ والعدد المركب و $0 \leq \alpha \leq 360$

لكي نعرف ضرب عدد مركبين نتذكر ضرب عددين حقيقين.

أ) مثلاً: $2 \cdot 3 = 6$ ، تأثير كل من $+2$, $+3$, $+6$ هو 0°.



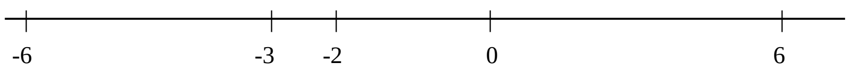
ب) $(-2) \cdot 3 = (-1) \cdot (2 \cdot 3) = -6$



ما قمنا به هو: حسبنا حاصل ضرب المتجه الثاني 3 في طول المتجه الأول $2 \cdot 3 = +6$ ثم أدرنا المتجه 6+ بزاوية 180° فحصلنا على 6-. انتبه إلى أن 180° هو تأثير المتجه 1- (وهو يساوي تأثير 2-).

ج) $(-2) \cdot (-3) = (-1) \cdot (2) \cdot (-3) = (-1) \cdot (-6) = +6$

ما قمنا به هو: ضربنا المتجه 3- في طول المتجه الأول (أي في 2) حصلنا على 6- حسب (ب) ثم ندير المتجه الناتج بزاوية 180° بعكس عقارب الساعة والتي هي تأثير المتجه الأول.



نعمم فكرة ضرب الأعداد الحقيقية ألى الأعداد المركبة

إن طول المتجه $cos\alpha+sin\alpha\cdot i$ (**وهو قيمته المطلقة**) يساوي 1 لأن $\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$

لذلك فإن $(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot i)\cdot(a+bi)$ هو المتجه الناتج عن دوران $a+bi$ بزاوية α، بعكس عقارب الساعة.

لو فرضنا أن التمثيل القطبي للعدد $a + bi$ هو: $r(\cos\beta+\sin\beta\cdot i)$

فإن $(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot i)\cdot r\cdot(\cos\beta+\sin\beta\cdot i)$ هو المتجه الناتج عن دوران $r+$ بزاوية β ثم بزاوية α. فهو المتجه الناتج عن دوران r بزاوية $\alpha+\beta$.

أي أن:

$$(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot i)\cdot r\cdot(\cos\beta+\sin\beta\cdot i)$$

$$=r(\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot i)$$

وبشكل خاص:

$$(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot i)(\cos\beta+\sin\beta\cdot i)=\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot i$$

نفرض الآن أن:

$$Z_1=r_1(\cos\alpha+\sin\alpha\cdot i)$$

$$Z_2=r_2(\cos\beta+\sin\beta\cdot i)$$

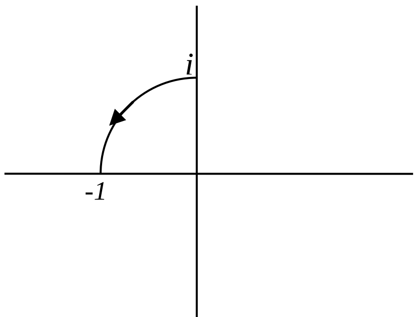
لذلك نعرف : $Z_1\cdot Z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)\cdot i)$

أي أن حاصل ضربهما هو العدد المركب الناتج عن ضرب أحدهما في القيمة المطلقة للثاني وإدارة العدد الناتج بزاوية تأثير الثاني (أو بالعكس). وهو يساوي العدد الناتج عن دوران $r_1\cdot r_2$ + بمجموع زاويتي التأثير للعددين. فمثلما كان لجمع عددين مركبين مفهوم هندسي فإن لضرب عددين مركبين مفهوماً هندسياً أيضاً.

كم يساوي i^2 ؟

من الواضح أن زاوية تأثير i هي $90°$ لذلك: $i = \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \cdot i$ ،

$i^2 = i \cdot i = \cos 180^\circ + \sin 180^\circ \cdot i = -1$ (ندير i بزاوية تأثير i نحصل على -1)



بما أن $i^2 = -1$ فإن i هو أحد حلول المعادلة $x^2 = -1$.

عندما تكون مجموعة الهدف الأعداد المركبة. (المتجهان i و $-i$ هما المتجهان الذي تربيع كل منهما يساوي المتجه -1).

حساب ضرب عددين مركبين بدون حساب تأثيرهما

نفرض $Z_1 = a + bi$ ، $Z_2 = c + di$

وأن $Z_1 = r_1(\cos\alpha + \sin\beta \cdot i)$ و $Z_2 = r_2(\cos\alpha + \sin\beta \cdot i)$

$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $r_2 = \sqrt{c^2 + d^2}$

حسب التعريف فإن:

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+\beta) \cdot i)$$
$$= r_1 r_2 (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)i)$$

$$= (r_1\cos\alpha \cdot r_2 \cdot \cos\beta - r_1\sin\alpha \cdot r_2\sin\beta) + (r_1\sin\alpha \cdot r_2\cos\beta + r_1\cos\beta \cdot r_2\sin\beta)i$$

$$= (ac - bd) + (bc + ad)i$$

نستنتج أن:

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (bc+ad)i$$

سنبين الآن أن فك الأقواس مسموح:

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi +bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad+bc)I -bd$$
$$= (ac -bd) + (ad +bc)i$$

حصلنا حسب فك الأقواس على نفس النتيجة، وهذا يبين أن فك الأقواس هي عملية مسموحة.

قانون ديموافر: $(r(cosa+sinai))^n = r^n(cosna + sinna\cdot i)$ لكل n طبيعي

من السهل أن نبرهن بالاستقراء الرياضي أن حاصل ضرب n أعداد مركبة هو العدد الناتج عن دوران متجة حاصل ضربهما بزاوية تساوي مجموع تأثيراتها.

תקציר:

המספרים המרוכבים *(דרך לימוד חלופית)*

ד"ר עלי עותמאן-מכללת השריעה-באקה אלגרבייה

במאמר זה אני מציע דרך לימוד חלופית לדרך הלימוד הקיימת של המספרים המרוכבים בבתי הספר התיכוניים לתלמידי 5 יחידות מתמטיקה .
לפי הדרך שאני מציע מספר מרוכב הוא וקטור במישור.
כל פעולה כגון : חיבור,כפל,ערך מוחלט,צמוד מוגדרת באופן גיאומטרי.
לפי דרך הלימוד הקיימת מספר מרוכב נחשב ל"דבר" מורכב משני חלקים אחד מהם ממשי והחלק שני הוא שורש ריבועי של מספר שלילי.
בשלב זה מחייב המורה את תלמידיו לקבל באופן דמיוני קיום שורש ריבועי של מספר שלילי,למרות שלפני זה הוא הדגיש על אי קיום שורש ריבועי של מספר שלילי .
לפי דעתי דרך לימוד זו מראה לתלמידים כי ככל שהם מעמיקים בלימוד המתמטיקה הם מעמיקים ללכת בכיווני לימוד דמיוניים שאין להם שום קשר עם העולם הממשי.
דבר זה אינו מעודד את התלמידים להמשיך וללמוד את המקצוע .
כמו כן אם דברי המורה עברו בלי התנגדות מצד התלמידים זה מצביע על שיטת הלימוד האלגוריתמית בלימוד.

התלמידים מחכים עד שהמורה ידריך אותם איך לחשב והם מתחילים בביצוע.
הזכרתי מניעים לכתיבת המאמר אולי זה יעודד את המורה לקבל את הדרך שאני מציע.