جامعة، المجلد 18 العدد 1 (2014/1435)، 30-1

# إدراك طلاب صف تاسع لتحويلات الدوال في بيئة تكنولوجية دينامية

أحلام عنبوسي* ووجيه ضاهر**

**تلخيص:**

تعلم موضوع تحويلات الدوال يساعد الطلاب على ادراك مفهوم الدالة، والذي يشكل موضوعا أساسيا في الرياضيات، ولكن طلاب المدارس وطلاب الكليات أيضا يواجهون في هذا التعلم صعوبات مختلفة، خصوصا عندما تجرى التحويلات في دوال غير بسيطة. البحث الحالي يحاول تسهيل تعلم طلاب الصف التاسع لهذه التحويلات من خلال حل مهام استكشافية بمساعدة جيوجيرا. اشترك في هذا البحث تسعة عشر طالبا من طلاب الصف التاسع الممتازين واللذين استخدموا جيوجبرا للقيام بمهام استكشافية متعلقة بتحويلات: الإزاحة، الانعكاس والانكماش. لتحليل تعلم هؤلاء الطلاب للتحويلات استخدمنا النظرية المعرفية ف.س.ك.هـ. (هذه الحروف تمثل الحروف الأولى من الكلمات التالية: فعل، سيرورة، كائن، هيكلية والمأخوذة عن APOS theory- action, process, object, schema). نتائج البحث تشير إلى اختلاف مستويات الطلاب في فهمهم لتحويلات الدوال بحيث كان حوالي 60% منهم في مستوى كائن (المستوى الأعلى) أو قريبين منه، وكان الآخرون (40%) في مستوى السيرورة (المستوى الأوسط) أو قريبين منه. بالإضافة لذلك، كشف البحث عن وجود مستويات "بينية" لفهم الطلاب تحويلات الدوال والذي يشير إلى اتصالية مستويات نظرية ف.س.ك.هـ. (APOS theory) عند استخدامها لتحليل ادراك المفاهيم الرياضية.

كلمات مفتاحية: إدراك رياضي، طلاب، صف تاسع، تحويلات الدوال ، بيئة تكنولوجية، بيئة دينامية.

## مقدمة

تدريس موضوع تحويلات الدوال في مساقات تحضيرية لمساقات التفاضل والتكامل في الجامعات أصبح مهما لأنه يساعد الطلاب على استخدام مصطلح الدالة وفهمه بشكل عميق (Lage & Gaisman, 2006). عادة ما يتم تدريس موضوع تحويلات الدوال على مستوى الكليات (Bingham, 2007). على الرغم من ذلك، يصادف الطلاب هذا الموضوع

* أكاديمية القاسمي.

** أكاديمية القاسمي وجامعة النجاح الوطنية – نابلس.

في مراحل أبكر- في الصف التاسع، ولكنّ الطلاب حينها يتعاملون مع التحويلات كأداة لتعلم الدالة التربيعية، ولا يتعاملون معها كموضوع منفصل، هذا ما جعلنا نرغب في تدريس موضوع تحويلات الدوال بأكمله للمرحلة الإعدادية، خاصة لطلاب الصف التاسع. محاولتنا بدت لنا مثيرة للاهتمام، وذلك لأننا رغبنا في تدريس الطلاب التحويلات في دوال لا يصادفونها ولا يتعاملون مع التحويلات المتعلقة بها في المرحلة الإعدادية وهي دالة القيمة المطلقة، الدالة التكعيبية والدالة من الدرجة الرابعة. الباحثان درايفوس واستنبرغ (Eisenberg & Dreyfus, 1994) أشارا إلى صعوبة تعلم تحويلات الدالة التربيعية في المرحلة الإعدادية. نحن نتوقع أن تساعد الأداة التكنولوجية (جيوجبرا) الطلاب على تعلم التحويلات في تلك الدوال غير البسيطة المذكورة سابقا.

هناك عدة طرق مُقترحة لتدريس تحويلات الدوال منها طريقة الرقص الحديث (Bingham, 2007)، طريقة المسواك (PBS MATHLINE, 2013) وباستخدام التكنولوجيا (Consciência & Oliveira, 2011). وقد قررنا في هذا البحث استخدام التكنولوجيا، أداة الجيوجبرا تحديدا، كأداة متاحة لدى طلاب الصف التاسع لمساعدتهم على تحقيق فهم عميق لمفاهيم مختلفة متعلقة بتحويلات الدوال. وقد اخترنا أداة الجيوجبرا لثلاثة أسباب. أولا هي أداة متاحة-مجانية، ثانيا، يمكن تشغيلها بأي لغة نريد وثالثا، يمكن استخدامها لبناء المفاهيم الرياضية، في السياق الذي نحن بصدده المفاهيم هي تحويلات الدوال. وقد عملنا على مشاركة الطلاب منذ البداية في بناء التحويلات الهندسية بمساعدة الأداة التكنولوجية-جيوجبرا، وذلك لأنّ المعرفة المُتضمنة في سيرورة البناء ساعدتهم على فهم مختلف الثيم المتعلقة بالتحويلات كالدالة الأصل، اتجاه الإزاحة ، مقدار الإزاحة ومحور الانعكاس.

استخدام الطلاب أداة الجيوجبرا لتعلم وإدراك مفاهيم تحويلات الدوال جعلنا نقصد فحص إدراكهم لتلك المفاهيم ومستوى الفهم الذي توصلوا إليه بمساعدة جيوجبرا.

تحديدا سؤال البحث هو: ما هو إدراك طلاب الصف التاسع لتحويلات الدوال إثر تعلمهم في بيئة تكنولوجية تفاعلية؟

**خلفية نظرية**

بدأ الباحثون بالاهتمام بفهم الطلاب لموضوع تحويلات الدوال منذ عقدين من الزمن (Eisenberg & Dreyfus, 1994; Consciência & Oliveira, 2011). عادة يقوم الباحثون بفحص فهم الطلاب للتحويلات في دوال بسيطة كالدالة الخطية والتربيعية، وذلك عن طريق وصفهم للصعوبات التي يواجهها الطلاب ومقارنتهم بين تعلم الطلاب للإزاحة الأفقية والعمودية. وهم على الأغلب يشيرون إلى وجود صعوبات في فهم الإزاحة الأفقية (Dreyfus& Eisenberg,1994).

دراسة زازكس، ليلجدال وجادوسكي (Zazkis, Liljedahl and Gadowsky, 2003) اهتمت في فحص التفسيرات التي أعطاها طلاب المدارس الثانوية ومعلموهم لمفهوم الإزاحة في الدوال، مع تسليط الضوء على الدالة $y=(x-3)^2$ وعلاقتها بالدالة $y=x^2$. تركزت تفسيرات المشتركين على الاهتمام بالأنماط، تحديد النقاط الصفرية للدالة وحساب قيم الدالة في نقاط معينة. أظهرت النتائج مرة أخرى أن مفهوم الإزاحة الأفقية للدالة- على الأقل عند البداية، لا تتفق مع توقعات وحدس معظم المشتركين.

محاولين التغلب على صعوبات القيام بالتحويلات اهتم أيزنبرغ ودريفوس (Dreyfus & Eisenberg,1994) في فحص كيف تساعد التكنولوجيات الحاسوبية الطلاب على إدراك مفهوم تحويلات الدالة. وقد استخدما برنامجا حاسوبيا لكي يفحصا بشكل محدد كيف تساعد التمثيلات البصرية للدوال الطلاب على الدمج بين التفكير البصري والتفكير الجبري في سياق تحويلات الدوال. وجد الباحثان، بعد ستة دروس عن تحويلات الدوال باستخدام برمجيات حاسوبية، أنّ معالجة الطلاب البصرية ازدادت، كما ارتفع معدل نجاحهم في الكشف عن التحويلات التي تمت دراستها (في الدالة التربيعية)، ولكن بعد التجربة، لم ينجح الطلاب في التعامل مع دوال أخرى كثيرة الحدود من درجات أعلى. علاوة على ذلك، أشار أيزنبرغ ودريفوس (نفس المصدر) إلى الصعوبة التي واجهها الطلاب في التعامل مع الإزاحة الأفقية مقارنة بالإزاحة العمودية. مدعين أنّ السبب في ذلك قد يكمن في أن الإزاحة الأفقية معقدة أكثر من حيث المعالجة البصرية نسبة للإزاحة العمودية. كما

لاحظ أيزنبرغ ودريفوس أن فهم مصطلح الدالة كعنصر رياضي قد يكون شرطا لتحقيق الفهم في موضوع تحويلات الدوال.

دراسة أخرى استخدمت التكنولوجيا في عملية تعلم الطلاب تحويلات الدوال هي دراسة بوربا وكونفري (Borba and Confrey, 1996)، اللتين قامتا بإجراء دراسة حالة لطلاب بعمر 16 سنة، بحيث درسوا تحويلات الدوال بواسطة بيئات متعددة التمثيلات في الحاسوب. هدفت الدراسة إلى فحص ادراك الطلاب للإزاحة الأفقية، للإزاحة العمودية، للانعكاس بنسبة لمستقيم أفقي ومستقيم عمودي وتمدد وانكماش الدوال. نتائج الدراسة تتفق مع الدراستين السابقتين حيث أظهرت أن هنالك مشاكل في تفسيرات الطلاب للإزاحة الأفقية في الدوال التربيعية.

استخدم بعض الباحثين نظريات معرفية لتحليل فهم الطلاب تحويلات الدوال. على سبيل المثال، استخدم الباحثون النظرية المعرفية سيرورة-كائن (process-object) لتحليل تصرفات الطلاب عند تعلمهم تحويلات الدوال (Consciência & Oliveira, 2011; Katalifou, 2004; Kimani & Masingila, 2006).

كونسينسيا واوليفيرا (Consciência & Oliveira, 2011) درستا نشاط اثنين من طلاب المرحلة الثانوية أثناء أدائهما لمهمة تتعلق بتحويلات الدوال من الصورة $p(x) + k$ و $p(x + h)$ عند استخدامهم حاسبة بيانية. أظهرت النتائج بأنه لدى الطلاب نظرة للدالة كعنصر، وأنهم أسسوا ثوابت إجرائية عن التحويل $p(x) + k$.

كاتاليفيو (Katalifou, 2004) أراد أن يفحص إمكانية تقليص الفجوة بين المفاهيم الإجرائية وبين المفاهيم الهيكيلية لتحويلات الدوال. مجموعتان من الطلاب اشتركتا في نشاط رياضي عن تحويلات الدوال باستخدام برنامج حاسوبي متقدم. النتائج أشارت أن البرنامج الحاسوبي ربما ساهم في تشكيل مسار لفهم الصفات التي لا تتغير ضمن تحويلات الدوال.

كيماني وماسينجيلا (Kimani and Masingila, 2006) قابلا ثمانية طلاب جامعيين من مساق التفاضل والتكامل، وسألاهم عن ثلاثة مفاهيم مرتبطة بالدوال (تحويلات الدوال ،

الدالة العكسية، تركيب الدالة)، استخدم الباحثان طريقة التحليل سيرورة\عنصر ونموذجا مرنا لتحليل البيانات. أثناء عملية الترميز ظهرت أربع ثيم رئيسية: معرفة إجرائية مقابل معرفية مفهومية، مرونة، قوة جبرية مقابل ضعف جبري، سبل لإقناع الذات. أظهرت الدراسة أن الطلاب يستخدمون طرق متنوعة ولكن محدودة لحل المهام المتعلقة بتحويلات الدوال، الدالة العكسية، تركيب الدالة والعلاقة بين الثلاثة مفاهيم.

باحثون آخرون استخدموا النظرية المعرفية فعل-سيرورة-كائن-هيكلية (APOS: Action, Process, Object, Scheme) لتحليل ادراك الطلاب للمفاهيم الرياضية المتعلقة بتحويلات الدوال (Baker, Hemenway & Trigueros, 2000; Hollebrands, 2003; Lage & Gaisman, 2006). في دراسة بيكر، هيمناوي وتريجوروس ( Baker, Hemenway & Trigueros, 2000) تم فحص وتحليل فهم الطلاب للتحويلات في دوال مختلفة اعتمادا على النظرية المذكورة (APOS). وقد أكدوا ما وجده أيزنبرغ ودريفوس (1994) أن الطلاب يستصعبون فهم الإزاحة الأفقية نسبة للإزاحة العمودية. فسّروا ذلك بأن القيام بالإزاحة العمودية هو كالقيام بالعمليات الأساسية على الدوال في حين أن القيام الإزاحة الأفقية يتم عن طريق إجراء عملية على متغير مستقل ومن ثم إجراء عمليات أخرى اعتمادا على النتيجة السابقة (Baker et al., 2000). كما ادعوا أنّ هذه الصعوبات متعلقة بعدم اكتساب الطلاب لمفهوم الدالة بشكل كامل، وهذا يؤكد ما أشار له بيكر وآخرون في دراستهم.

هوليبراندس (Hollebrands, 2003) درس فهم طلاب المرحلة الثانوية للتحويلات الهندسية في الدوال (الإزاحة، الانعكاس، الدوران والتمدد) عند استخدام أداة تكنولوجية وهي سكيتشباد (Geometer's Sketchpad). تم تدريس وحدة تعليمية من سبع دروس لصف من الصفوف الممتازة في الهندسة، ثم تم تحليل تصورات الطلاب لتحويلات الدوال بناء على نظرية (APOS). تشير النتائج إلى أنّ فهم الطلاب للمفاهيم الجبرية الأساسية- مثل المجال، المتغيرات، البارامترات، العلاقات وخصائص التحويلات، هو ضروري لفهم أعمق لتحويلات الدوال.

ليج وجايزمان (Lage & Gaisman, 2006) قابلا الطلاب الجامعيين أثناء حلهم أسئلة تتعلق بتحويلات الدوال، تمّ تحليل النتائج باستخدام نظرية (APOS)، وقد أظهرت النتائج بأنّه يمكن للقليل من الطلاب التعامل بثقة مع مشكلات تتعلق بالتحويلات، وقد أرجع الباحثان قلة عدد الطلاب إلى عدم تذويت العمليات المتعلقة بالتحويلات أو عدم قدرتهم على تحويل العمليات الرياضية إلى عناصر رياضية.

البحث الحالي سيعتمد على النظرية المعرفية ف.س.ك.هـ. (APOS) لتحليل البيانات المتعلقة بفهم طلاب المرحلة الإعدادية لتحويلات الدوال.

**الإطار النظري**

نستخدم في هذا البحث طريقة الفك الجيني (genetic decomposition) لمفاهيم تحويلات الدوال المستخدمة سابقا عند لاج وجايزمان (Lage and Gaisman, 2006) واللذين طوراها اعتمادا على بحث سابق لبيكر، هيمنواي وتريجورس (Baker, Hemenway & Trigueros, 2001)، كما أن هذه الطريقة تعتمد على دراسة ماهاراج (Maharaj, 2010)، وهي موصوفة أدناه.

الطلاب اللذين يعملون في مستوى الفعل في موضوع تحويلات الدوال يمكنهم تنفيذ العمليات على الدوال خطوة خطوة، في حين تكون هذه العمليات مطبقة في سياق واحد من التمثيلات المختلفة كالتمثيل الجبري، الكلامي أو البياني. هذا العمل يحتاج إلى معرفة محفوظة في الذاكرة أو لإشارات خارجية. الطلاب في هذا المستوى (مستوى الفعل) يدركون الاختلافات بين الدالة وبين تحويلاتها فقط في سياق القاعدة التي تحدد الدالة. كما أنهم يدركون التشابه بين الدالة وبين تحويلاتها أو التشابه بين تحويلاتها، فقط من خلال خواص الرسم البياني. تكرار المتعلمين لهذه الأفعال جبريا أو بيانيا والتفكير بها انعكاسيا يساعدهم على الانتقال إلى مستوى السيرورة.

الطلاب اللذين يعملون في مستوى السيرورة يمكنهم وصف تغيرات الدالة الأصل كنتيجة لتطبيق التحويلات من دون الحاجة لتطبيق كل خطوة وخطوة. الطلاب في هذه المرحلة

يمكنهم النظر إلى الرسم البياني للدالة المحوّلة ووصف التغيرات الناتجة من التحويلات. بالإضافة لذلك، يمكن لهؤلاء الطلاب تنفيذ العملية بشكل عكسي، بحيث يكونون قادرين على اكتشاف الدالة الأصل قبل التحويل. الطلاب في هذا المستوى يستصعبون تنسيق المعلومات التي حصلوا عليها من التمثيلات المختلفة، كما يستصعبون ترجمة هذه المعلومات بمرونة من سياق تمثيلي معين لآخر.

عندما يعمل الطلاب بمرونة في مختلف التمثيلات، يفكرون بكل السيرورات بشكل انعكاسي وعندما يفكرون بها "ككلية"، يمكن اعتبارهم في مستوى الكائن. في هذا المستوى، يكون الطلاب قادرين على تطبيق الأفعال على الدوال المحوّلة وتنسيق خصائصها من حيث التغيرات على الدالة الأصل. بالإضافة لذلك، الطلاب في هذه المرحلة يمكنهم تطبيق معرفتهم عن التحويلات في أي دالة كما يمكنهم التعرف على الدالة الأصل، والمقارنة بين العديد من الدوال المتحولة في أي تمثيل من مختلف التمثيلات.

الهيكلية المتعلقة بتعلم التحويلات تعتمد على فهم كيفية القيام بالرسم البياني لدالة ما، عندما يكون تعبيرها الجبري معطى، بالإضافة إلى إدراك سلسلة التحويلات المجراة على الدالة الأصل. لذا، فهي تشمل ادراك مختلف التحويلات والثيم المتعلقة بها: الدالة الأصل، الترتيب الصحيح للتحويلات، مقدار التحويلات، اتجاه الإزاحة ومحور الانعكاس.

**أهمية البحث وأهدافه**

في دراسة للاج وجايزمان (Lage & Gaisman, 2006) تمت التوصية على إجراء أبحاث أخرى في المجال، والمتعلقة بفهم الطلاب لتحويلات الدوال، حيث أشارا أن هذا الموضوع هو موضوع ذو أهمية كبيرة لثلاثة أسباب: (1) هو موضوع رئيسي في المساقات التمهيدية لمساقات حساب التفاضل والتكامل، (2) هذا الموضوع يوفر فرصة لتحليل أفكار الطلاب بالنسبة للدوال وللمتغيرات، بما في ذلك استخدامهم للتمثيلات المختلفة لها، (3) هذا البحث يمكن أن يُستخدم كمرشد لبناء وتصميم موارد تعليمية واستراتيجيات التي تعزز فهم الطلاب للدوال والتحويلات فيها. هذه الأسباب تقف وراء نيتنا في دراسة فهم طلاب

المدرسة الإعدادية لتحويلات الدوال باستخدام التكنولوجيا- بالتحديد جيوجبرا، وفحص إن كان للتكنولوجيا دور إيجابي ومساعد للطالب في فهم تحويلات الدوال التكعيبية، الدوال من الدرجة الرابعة ودالة القيمة المطلقة. هذه الدوال التي رأينا أن أيزنبرغ ودريفوس (Eisenberg & Dreyfus, 1994) أظهرا صعوبة فهم الطلاب للتحويلات فيها. خيارنا لطلاب المرحلة المتوسطة نبع من توقعنا بأن التكنولوجيا وخاصة جيوجبرا، وهي أداة لبناء المفاهيم الرياضية، يمكن أن تسهل فهم الطلاب للتحويلات في الدوال المذكورة سابقا.

لقد اخترنا النظرية المعرفية ف.س.ك.ه (APOS) لتساعدنا في تحليل فهم الطلاب لتحويلات الدوال، وذلك لأنها تصف كيفية تطور هذه المفاهيم، ولأنها قد استخدمت من قبل عديد من الباحثين لوصف فهم الطلاب لتحويلات الدوال.

**منهجية البحث**

يتبع هذا البحث المنهج النوعي وهو منهج ملائم لتحليل عمليات إدراك الطلاب لموضوع رياضي هو التحويلات على الدوال.

سياق البحث وإجراءات الدراسة:

أجري البحث في الصف التاسع في مدرسة إعدادية تقع في منطقة المثلث من فلسطين. الكاتب الأول علم وحدة عن تحويلات الدوال باستخدام جيوجبرا، وهي أداة تكنولوجية حديثة لتعليم وتعلم الرياضيات. الوحدة التدريسية مكونة من خمسة دروس كل درس منها مدته 90 دقيقة، بحيث كانت مواضيع الدروس متسلسلة على النحو التالي: الدرس الأول تناول ارتباط التحويلات في حياتنا اليومية. أما الدرس الثاني والثالث فقد تناولا تدريس تحويل الإزاحة الأفقية وتحويل الإزاحة العمودية، ومن ثم في الدرس الرابع تعامل طلاب صف تاسع مع تحويل الانعكاس وأخيرا في الدرس الخامس تطرقنا إلى تحويل الانكماش، وكل هذه التحويلات دُرست في سياق الدوال الثلاث المذكورة أعلاه.

خلال تنفيذ النشاطات والفعاليات المختلفة، طُلب من الطلاب وصف العلاقات بين التمثيلات المختلفة للتحويلات، خاصة عندما أعطي للطلاب الرسم البياني أو التعبير

الجبري. علاوة على ذلك، خلال تنفيذ النشاطات والفعاليات المختلفة عمل المعلم كموجّه ومسهل لعملية التعلم والنقاش داخل الصف، كما قدّم تغذية مرتدة للطلاب عن استنتاجاتهم وشجع الطلاب على التفكير بشكل عميق. استخدم المعلم الطريقة البنائية لبناء المفاهيم الرياضية حول موضوع التحويلات وذلك بمساعدة جيوجبرا ومجموعة أوراق عمل استدراجية تعتمد العمل الفردي والاكتشاف الموجه. تم بناء هذه الأوراق بعد دراسة عميقة للموضوع وبعد الاطلاع على أبحاث سابقة ذات علاقة، كما تم استشارة مختصين في المجال (مختصين تربويين ومختصين رياضيين).

**المشتركون في البحث:**

المشتركون في البحث هم تسعة عشر طالبا وطالبة من طلاب الصف التاسع الممتازين، وعلى الرغم من كون جميع أفراد العينة من الطلاب الممتازين إلا أن هناك اختلافات فردية بينهم. وقد اخترنا الطلاب الممتازين ليشتركوا في البحث لأننا أردنا من خلال التجربة تعليم مواضيع متقدمة في التحويلات والتي تعالج دوال ليست بسيطة، وإن هذا الموضوع يُعتبر موضوعا متقدما وذلك بناء على ما جاء في الأدب البحثي.

تمّ اختيار عينة البحث هذه لأنها عينة متوافرة وذلك بعدما توجهنا لمدير المدرسة ومعلم الرياضيات لمجموعة الطلاب الممتازين وأبديا رغبتهما في المشاركة في البحث.

**أداة جمع المعطيات**

جمعت المعطيات من إجابات الطلاب على سؤالين قبل وبعد التجربة، كل سؤال منهما مكون من قسمين. يفحص السؤالان ادراك الطلاب لتحويلات الدوال، بحيث في القسم الأول من السؤال الأول تم إعطاء الطلاب أربعة تعابير جبرية لدوال مختلفة وطُلب منهم رسم الدوال وفقا للتحويلات المجراة على الدوال الأصل، أما في القسم الثاني فقد طُلب منهم وصف التحويلات المجراة على نفس الدوال في القسم الأول كلاميا. في كلا السؤالين اللذين أعطيا للطلاب قبل وبعد التجربة كانت هناك دوال معروفة لهم في حين كان هناك دالة جديدة عليهم. حيث كان ثلاثة دوال من الأربعة معروفة للطلاب وواحدة غير معروف

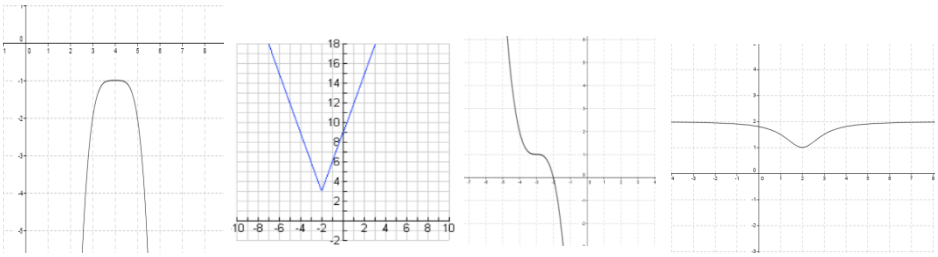
لهم (في المهمة القبلية الدالة المعروفة كان الدالة التربيعية والدالة غير المعروفة كان دالة القيمة المطلقة، أما في المهمة البعدية كانت الدوال المعروفة: الدالة التكعيبية، دالة القوة الرابعة ودالة القيمة المطلقة والدالة غير المعروفة كان الدالة النسبية).

في القسم الأول من السؤال الثاني تم إعطاء الطلاب أربعة رسوم بيانية لدوال مختلفة وطلب منهم كتابة التعبير الجبري لهذه الدوال اعتمادا على التحويلات المجراة على الدوال الأصل. بينما طلب منهم في القسم الثاني وصف التحويلات المجراة على هذه الدوال كلاميا. فيما يلي نبين التعابير الجبرية والرسوم البيانية المعطاة للطلاب في المهمة البعدية، وذلك لكون المهمتان: القبلية والبعدية، متشابهتان من حيث المبنى والنمط.

التعابير الجبرية المعطاة للطلاب في الأسئلة البعدية هي: *(أ)* $f(x)=-(x-4)^4+7$، *(ب)* $f(x)=4|x-3|+8$، *(ج)* $f(x)= -2(x+3)^3+4$ و *(د)* $f(x) = \frac{-2}{1+(x-1)^2}$.

ملاحظة: في البند (د) تم إعطاء الطلاب الرسم البياني للدالة الأصل $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ومن ثم طُلب منهم رسم الدالة المعطاة في البند (د).

أما الرسوم التي أعطيت للطلاب بعد التجربة فهي مبينة في رسم 1.



(أ) 1 (ب) 1 (ج) 1 (د) 1

**رسم 1: الرسوم الأربعة البعدية المعطاة للطلاب**

في الدالة الرابعة تم إعطاء الطلاب الرسم البياني والقاعدة الجبرية للدالة الأصل $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ومن ثم طلب منهم ايجاد التعبير الجبري للدالة المعطاة ووصف التحويلات المجراة عليها كلاميا.

يمكن النظر للأسئلة المعطاة في ملحق 1.

**طريقة تحليل المعطيات**

من اجل تحليل البيانات استخدمنا طريقة تحليل المحتوى الاستدلالية، حيث أجرينا مقارنات مستمرة بين وحدات من البيانات المجمعة (جمل، رسوم بيانية، تعابير جبرية ومزيج منها) من اجل تحليلها لمكونات النظرية المعرفية المستخدمة في البحث وهي نظرية (APOS).

**النتائج**

البحث الحالي يهدف إلى دراسة ادراك طلاب الصف التاسع للتحويلات في دوال غير بسيطة، وذلك عند استخدام أداة تكنولوجية وهي في حالتنا جيوجبرا. وقد فحصنا هذا الإدراك عن طريق استخدام نظرية ف.س.ك.هـ. (APOS).

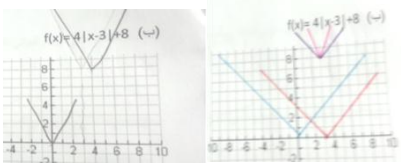
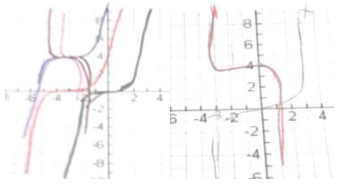
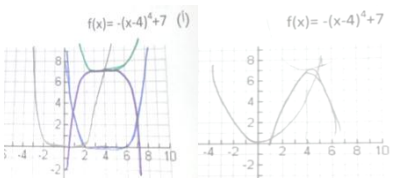
قبل وبعد المرور بالتجربة حاولنا تقسيم الطلاب إلى مستويات نظرية ف.س.ك.هـ. (APOS) لكنا لاحظنا أن الطلاب موجودون في مستويات عديدة لا يمكن حصرها في مستويات هذه النظرية (فعل-سيرورة-كائن-هيكيلية)، لذا عملنا على توسيع هذه المستويات لتشمل مستويات بينية أيضا بحيث تصبح المستويات كالاتي: مستوى فعل، مستوى فعل-سيرورة، مستوى سيرورة، مستوى سيرورة-كائن ومستوى كائن. وذلك لأن الطلاب في بعض الأحيان تعدوا الصفات المحددة في المستوى المعين ولم يتقنوا الصفات المحددة في المستوى الذي يليه. تقسيم الطلاب بعد المرور بالتجربة بالنسبة للمستويات المذكورة هو كالاتي: ثلاثة طلاب هم في مستوى فعل-سيرورة، خمسة طلاب في مستوى سيرورة، ثمانية طلاب في مستوى سيرورة-كائن وثلاثة طلاب في مستوى كائن. فيما يلي طريقة عمل كل نوع من هؤلاء الطلاب.

**الطلاب في مستوى فعل-سيرورة**

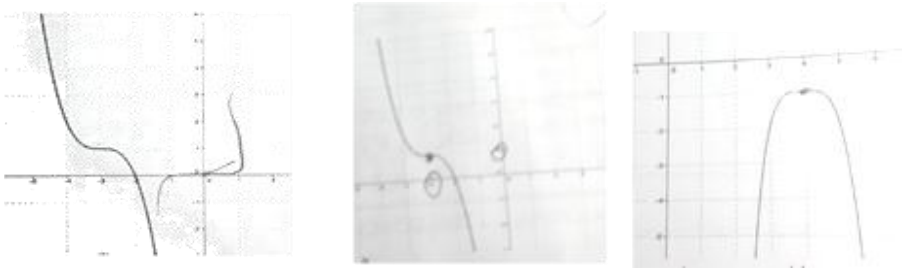
كان جميع هؤلاء قبل القيام بالتجربة في مستوى الفعل، حيث تعاملوا مع التحويلات خطوة خطوة (في حين رسم الدوال بيانيا رسم هؤلاء الطلاب الدالة المحولة بعدة خطوات: رسم الدالة الأصل، إجراء التحويلات واحد تلو الآخر) كما لم يستطيعوا التعامل مع أكثر

من تمثيل واحد لتحويلات الدوال . أما بعد التجربة، فقد تحسن مستوى هؤلاء الطلاب ليصبحوا في مستوى فعل-سيرورة، والذي يعني أن لعمل هؤلاء الطلاب صفتان أساسيتان. الأولى هي رسم الدالة المحول خطوة خطوة (في دوال معروفة لديهم)، إما عن طريق رسم جميع التحويلات أو عن طريق رسم الدالة الأصل فقط. والصفة الأخرى هي القدرة على التعامل مع جميع التمثيلات في الدوال، ولكنهم واجهوا صعوبة عند ذلك تتمثل في إغفالهم لأكثر من ثيمة من الثيم التالية المتعلقة بالتحويلات: اتجاه التحويل، مقداره، الدالة الأصل ومحور الانعكاس. بالإضافة لذلك، لم يحاول هؤلاء الطلاب التعامل مع الدالة الجديدة وهي في حالتنا الدالة النسبية. حلول هؤلاء الطلاب عند تعاملهم مع الدوال المختلفة مبينة في جدول 1 ورسم 2. جدول 1 يبين رسومات الطلاب عندما أعطوا التعبير الجبري للدالة المحولة وطلب منهم رسمها، ويبين رسم 2 إشارات الطلاب التي وضعوها على الرسوم البيانية للدوال المحولة المعطاة والمطلوب منهم إيجاد تعبيرها الجبري.

**جدول 1: رسومات طلاب فعل-سيرورة عندما أعطي لهم التعبير الجبري للدوال المحولة.**

| التعبير الجبري المعطى | رسوم الطلاب للدالة المحولة |
|---|---|
| $f(x) = 4\|x-3\|+8$ |  |
| $f(x) = -2(x+3)^3+4$ |  |
| $f(x) = -(x-4)^4+7$ |  |

أما عند تعامل هؤلاء الطلاب مع الرسوم البيانية ومحاولة الانتقال من التمثيل البياني إلى التمثيل الجبري، فقد نجحوا في ذلك ولكن وضع بعضهم علامات على الرسم البياني كإشارات على نقطة رأس الدالة أو رسم الدالة الأصل، في حين استطاع البعض الآخر الانتقال بشكل مباشر. رسم 2 يبين إشارات وضعها بعض الطلاب في هذا المستوى على الرسم البياني من اجل الانتقال من التمثيل البياني إلى التمثيل الجبري.



**رسم 2: إشارات وضعها طلاب فعل-سيرورة على الرسوم البيانية المعطاة من أجل مساعدتهم على إيجاد التعبير الجبري الملائم لهذه الرسوم.**

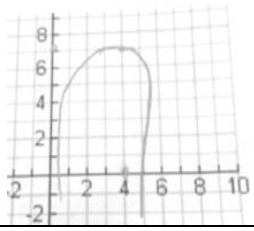
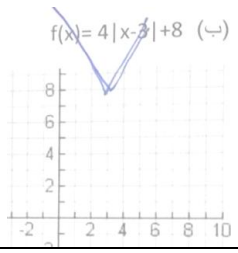
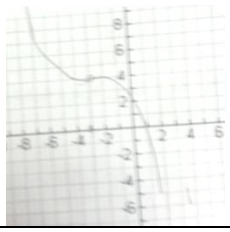
عند انتقال طلاب فعل-سيرورة من التمثيلين الجبري والبياني إلى التمثيل الكلامي فقد استطاعوا التعبير عن التحويلات كلاميا ولكن نقصتهم بعض الثيم كذكر الدالة الأصل، ترتيب التحويلات بشكل صحيح وذكر محور الانعكاس.

**الطلاب في مستوى سيرورة**

مستوى هؤلاء الطلاب قبل القيام بالتجربة كان على النحو التالي: واحد منهم لم يستطع تطبيق التحويلات على دالة معروفة لهم (الدالة التربيعية)، والباقون (أربعة طلاب) كانوا في مستوى الفعل حيث قاموا بالتحويلات خطوة خطوة، ولم يستطيعوا التعامل مع أكثر من تمثيل واحد من تمثيلات تحويلات الدوال. أما بعد التجربة فقد تحسن مستواهم ليصبح مستوى سيرورة، مما يعني أن لعملهم ثلاث صفات رئيسية. الأولى هي إجراء التحويلات بدون الحاجة لإجرائها خطوة خطوة (إلا أنهم احتاجوا في بعض الأحيان رسم نقاط على المحاور ليتمكنوا من رسم الدالة المحول بدقة)، الثانية هي قدرة هؤلاء الطلاب العمل مع

التمثيلات الثلاث للتحويلات في الدوال (جبرية، بيانية وكلامية) ولكنهم غالبا ما أغفلوا ترتيب التحويلات كما أغفلوا ذكر الدالة الأصل ومحور الانعكاس عند وصفهم التحويلات كلاميا. بالإضافة لذلك، طلاب هذا المستوى لم يستطيعوا تطبيق التحويلات في دالة جديدة وهو في حالتنا الدالة النسبية. جدول 2 يبين رسومات هؤلاء الطلاب للدوال المحولة عندما أعطي لهم التعبير الجبري لها.

**جدول 2: رسومات طلاب مستوى سيرورة للدوال المحولة عندما أعطي لهم التعبير الجبري لها.**

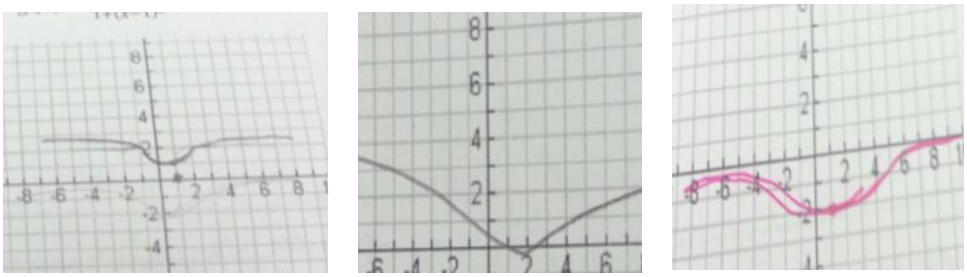
| التعبير الجبري المعطى | رسوم الطلاب للدالة المحول |
|---|---|
| $f(x) = -(x-4)^4 + 7$ |  |
| $f(x) = 4\|x-3\| + 8$ |  |
| $f(x) = -2(x+3)^3 + 4$ |  |

أما عند تعامل طلاب هذا المستوى مع الرسوم البيانية ومحاولة الانتقال من التمثيل البياني إلى التمثيل الجبري، فقد نجحوا في ذلك دون الحاجة إلى إشارات أو علامات خارجية مساعدة. بالإضافة لذلك، أغفل طلاب هذا المستوى عند وصفهم التحويلات

كلاميا اثنتين على الأقل من الثيم الثلاث التالية: ترتيب التحويلات، محور الانعكاس والدالة الأصل.

**الطلاب في مستوى سيرورة-كائن**

قبل القيام بالتجربة كان مستوى هؤلاء الطلاب على النحو التالي: خمسة كانوا في مستوى الفعل، اثنان كانوا في مستوى سيرورة-كائن وواحد كان في مستوى كائن. أما بعد التجربة أصبح هؤلاء الطلاب في مستوى سيرورة-كائن، الذي يعني أنّ لعملهم ثلاث صفات أساسية. الأولى هي أدائهم للتحويلات ذهنيا، الثانية هي التعامل مع التحويلات في جميع تمثيلاتها مع المحافظة على جميع الثيم المتعلقة بها إلا ترتيب التحويلات والثيمة المتعلقة بها محور الانعكاس. والثالثة هي محاولتهم تطبيق التحويلات في الدالة الجديدة وهي الدالة النسبية، ولكنهم عندها أغفلوا بعض التحويلات أو بعض الثيم. رسومات هؤلاء الطلاب للدوال المحولة عندما أعطي لهم التعبير الجبري لها مشابهة لرسومات طلاب مستوى السيرورة وذلك بالنسبة للدوال الثلاث التي تعامل معها الطلاب خلال التجربة وهي الدوال المطلقة، الدرجة الثالثة والدرجة الرابعة. رسم 3 يبين رسومات الطلاب للدالة الجديدة $f(x) = \frac{-2}{1+(x-1)^2}$.



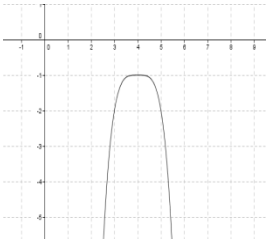
3 (أ) 3 (ب) 3 (ج)

**رسم 3: رسومات طلاب سيرورة-كائن للدالة النسبية المجرى عليها تحويلات.**

عند تطبيق هؤلاء الطلاب للتحويلات في دالة جديدة (الدالة النسبية) قاموا بإضافة\حذف تحويلات كما قام بعضهم بإغفال بعض الثيم المتعلقة كما هو مبين في رسم 3. على سبيل

المثال، في رسم 3 (أ) قام الطلاب بتوسيع الدالة بدلا من كمشها، وفي رسم 3 (ب) لم يميز الطلاب محور الانعكاس ولم يميزوا مقدار الإزاحة العمودية، وفي رسم 3 (ج) لم يميز الطلاب محور الانعكاس حيث اعتبروه المستقيم y=1 بدلا من محور x.

حاول طلاب هذا المستوى التعامل مع دالة جديدة (الدالة النسبية) عندما أعطي لهم الرسم البياني له وطلب منهم معرفة التعبير الجبري ولكنهم أغفلوا بعض التحويلات أو بعض الثيم أيضا، على سبيل المثال أغفل هؤلاء الطلاب الدلالة الجبرية للإزاحة العمودية. عند وصف هؤلاء الطلاب للتحويلات في الدالة الجديدة كلاميا لم يذكروا التحويلات بترتيب صحيح أو انهم لم يذكروا محور الانعكاس. يجب الإشارة إلى أن هاتين الثيمتين مرتبطتان وتنبعان من نقص في مفهوم واحد. لوصف العلاقة بين هاتين الثيمتين (ترتيب التحويلات ومحور الانعكاس) دعونا ننظر إلى متطلبات كتابة القانون الجبري للرسم البياني التالي:



**رسم 4: العلاقة بين ثيمتي محور الاتعكاس وترتيب التحويلات**

اثنان من طلاب مستوى سيرورة-كائن أعطوا الترتيبين التاليين للوصول للدالة المعطاة من الدالة الأصل:

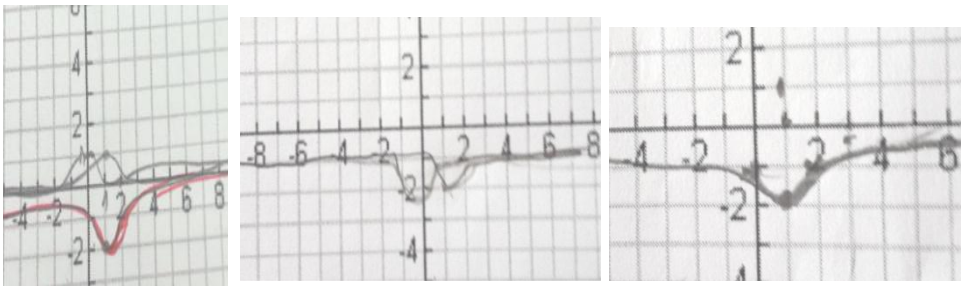
الطالب الأول: إزاحة الدالة أربع وحدات أفقيا إلى اليمين ووحدة إلى الأعلى، واجراء انعكاس على الدالة.

الطالب الثاني: إزاحة الدالة الأصل وحدة واحدة إلى الأسفل وأربع وحدات إلى اليمين ومن ثم نجري انعكاسا على الدالة.

من الواضح أنه يمكن اعتبار الترتيبات المذكورة صحيحة كما يمكن اعتبارها خاطئة، وذلك اعتمادا على محور الانعكاس المستخدم. لذا اعتبرنا محور الانعكاس ثيمة متعلقة بترتيب التحويلات كما اعتبرناهما ثيمتين أساسيتين لاعتبار الطالب في مستوى كائن.

**الطلاب في مستوى كائن**

قبل القيام بالتجربة كان اثنان من هؤلاء الطلاب في مستوى سيرورة بينما كان الآخر في مستوى سيرورة-كائن. أما بعد القيام بالتجربة أصبح هؤلاء الطلاب في مستوى كائن، وذلك يعني أن لعملهم ثلاث صفات أساسية. الأولى هي أدائهم للتحويلات ذهنيا، الثانية هي التعامل مع التحويلات في جميع تمثيلاتها مع المحافظة على جميع الثيم المتعلقة. والثالثة هي تطبيق التحويلات في دالة جديدة وهو في حالتنا الدالة النسبية. تطبيق هؤلاء الطلاب للتحويلات في دالة جديدة وقيامهم بذلك خطوة خطوة وبترتيب صحيح يبين أنهم وصلوا لمستوى كائن ولكنهم ما زالوا في بدايته. رسم 5 يبين رسومات هؤلاء الطلاب للدالة الجديدة $f(x) = \frac{-2}{1+(x-1)^2}$.

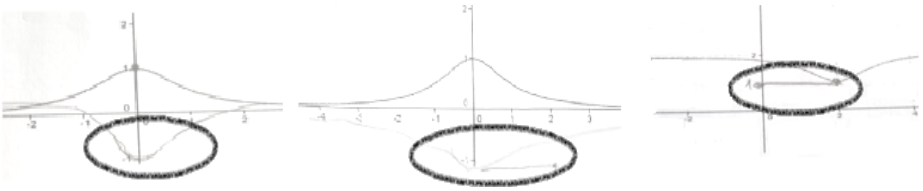


5 (أ) 5 (ب) 5 (ج)

**رسم 5: رسومات الطلاب للاقتران الجديد (النسبي) المعطى تعبيره الجبري.**

يظهر من رسم 5 اختلاف طلاب هذا المستوى في رسمهم الدالة الجديدة، حيث قام الطالب في رسم 5(أ) بوضع علامات بدلا من رسم الخطوات المختلفة للحصول على الدالة المحولة، وفي رسم 5(ب) لم يرسم الطالب الدالة الأصل. وفي رسم 5(ج) قام الطالب برسم التحويلات خطوة خطوة.

نجح طلاب هذا المستوى في التعامل مع دالة جديدة (الدالة النسبية) عندما أعطي لهم الرسم البياني للدالة النسبية المحولة وطلب منهم معرفة التعبير الجبري لها، إلا أنهم حينها احتاجوا للاستعانة بالرسم البياني وقاموا بوضع علامات مساعدة عليه أو على المحاور. رسم 6 يبين العلامات التي وضعها بعض الطلاب في هذا المستوى على الرسم البياني المعطى من اجل مساعدتهم في إيجاد القانون الجبري اعتمادا على التحويلات المجراة على الدالة الأصل.



**رسم 6: علامات وضعها طلاب مستوى كائن على الرسم البياني للاقتران النسبي المعطى من أجل ايجاد تعبيره الجبري**

**نقاش**

باحثون كُثر أشاروا إلى أهمية تعلم موضوع تحويلات الدوال بالنسبة لطلاب الرياضيات، وذلك لأن لهذا الموضوع علاقة وطيدة مع مفهوم الدالة والذي يشكل موضوعا مركزيا في المدرسة وفي كلية الرياضيات (Lage & Gaisman, 2006; Smith, 2009). بالإضافة لذلك، أشار الباحثون إلى أن الطلاب يواجهون صعوبات عند تعلمهم تحويلات الدوال (Katalifou, 2004)، حتى عندما يكون هذا التعلم للموضوع باستخدام التكنولوجيا (Eisenberg & Dreyfus, 1994). من ناحية أخرى، جيوجبرا هي أداة تكنولوجية حديثة لتعليم الرياضيات، وهي تستخدم بشكل خاص لتعليم موضوعي الجبر والهندسة، حيث ينتمي موضوع تحويلات الدوال لكليهما. في البحث الحالي أردنا فحص تأثير استخدام جيوجبرا عند تعليم التحويلات في دوال غير بسيطة لطلاب الصف التاسع، متوقعين أن إمكانية البناء المتاحة في الأداة ستساعد الطلاب على تذويت المفاهيم الرياضية والثيم

المختلفة المتعلقة بتحويلات الدوال والتي تعلم عادة في المداس الثانوية أو الكليات. لدراسة تعلم الطلاب لموضوع تحويلات الدوال استخدمنا النظرية المعرفية ف.س.ك.هـ. ( APOS theory) التي تصف المستويات التالية لإدراك المفهوم الرياضي: فعل، سيرورة، كائن وهيكلية.

بعد القيام بالتجربة، لا أحد من الطلاب كان في مستوى الفعل، ثلاثة طلاب وجدوا في المستوى-البيني فعل-سيرورة، خمسة طلاب وجدوا في مستوى سيرورة، ثمانية طلاب وجدوا في المستوى-البيني سيرورة- كائن وثلاثة طلاب في مستوى كائن. لذا، فإن نتائج البحث الحالي تشير إلى وجود "مستويات بينية" أي مستوى يجمع بين ميزات مستويين. ظاهرة المستويات البينية تذكرنا بالنظرية سيرورة- -كائن (process-procept-object) التي اقترحت وجود مستوى بيني بين المستويات سيرورة وكائن يدعى سيرورة-كائن (procept).

عدم وجود الطلاب في مستوى الفعل، حيث يعمل الطلاب في هذا المستوى خطوة خطوة وفي تمثيل واحد من تمثيلات تحويلات الدوال، نتج -على ما يبدو- من الإمكانيات البصرية والرمزية لأداة جيوجبرا والتي ساعدت الطلاب في التعامل مع أكثر من تمثيل ( Diković, 2009).

ثلاثة طلاب من تسعة عشر طالبا (15%) كانوا بعد التجربة في مستوى فعل- سيرورة. عمل هؤلاء الطلاب له صفات مستوى الفعل (العمل خطوة خطوة، الحاجة إلى وضع علامات أو إشارات) وبنفس الوقت له صفات مستوى الإجراء (الانتقال من تمثيل إلى تمثيل)، ما ساعد هؤلاء الطلاب إلى الاقتراب من مستوى سيرورة هو تعرضهم الدائم لتمثيلين مختلفين (جبري وبياني) زودتهم بهما البيئة التكنولوجية: جيوجبرا، وهذا ساعدهم على الانتقال من تمثيل لتمثيل بسهولة أي طورهم إلى مستوى سيرورة (Diković, 2009). هؤلاء الطلاب، بدون بيئة تكنولوجية، من المتوقع أن يكونوا بعد التجربة في مستوى الفعل كما كانوا قبلها، وذلك بسبب الصفة الأخرى لعملهم وهي التعامل خطوة خطوة مع التحويلات وهو ما يميز مستوى الفعل. بالرغم من قدرتهم على الانتقال بين التمثيلات المختلفة عند قيامهم بالتحويلات فان هؤلاء الطلاب كانت لديهم صعوبة في وصف

التحويلات كلاميا، قد يكون السبب في هذه الصعوبة هو عدم توفر التمثيل الكلامي في البيئة التكنولوجية التي تعاملوا معها، فهم تعاملوا مع التمثيل الكلامي فقط من خلال الأنشطة وهنا كان تعامل كل واحد منهم مع التمثيل الكلامي وفقا لقدرته وطورها حتى مستوى معين. هؤلاء الطلاب طوروا التمثيل الكلامي بقدر معين ولكن ليس بالقدر الكافي، بحيث نرى أن بعضهم أغفل ذكر بعض الثيم المتعلقة كاتجاه الإزاحة ومحور الانعكاس والدالة الأصل وثيم أخرى. من هنا نرى أن البيئة التكنولوجية ساعدت الطلاب في هذا المستوى على تطوير مفهومهم للتحويلات بقدر معين وكان من الممكن أن تتطور مفاهيمهم أكثر لو كانت هذه البيئة تشمل التمثيل الكلامي أيضا. ما كان يمكن أن يساعد أيضا على تطوير مفاهيم هؤلاء الطلاب هو نقاشات صفية تستخدم لغة رياضية دقيقة تعبر عن تمثيلات التحويلات البيانية والجبرية.

خمسة طلاب من تسعة عشر طالبا (26%) كانوا بعد التجربة في مستوى السيرورة، في حين كان معظمهم قبل التجربة في مستوى الفعل. هذا التطور في مستوى الطلاب نتج من استخدام الطريقة البنائية في التعليم التي تتمثل في قيام الطلاب ببناء التحويل المطلوب بأنفسهم الأمر الذي كان سهلا باستخدام إمكانات الأداة التكنولوجية (جيوجبرا)، ومما ساعدهم أيضا هو إمكانيات الأداة المستعملة (جيوجبرا)، حيث يجري الطلاب التحويلات المختلفة فيحصلون على الدالة الناتجة فقط دون ان تبقى الدوال الناتجة في الخطوات السابقة أمامهم. الطلاب في هذا المستوى واجهوا بعض الصعوبات في التمثيل الكلامي للتحويلات، هذه الصعوبات تتمثل في إغفال أربع ثيم، هي الدالة الأصل، ترتيب التحويلات، محور الانعكاس، وفي عدم القدرة على التعامل مع التحويلات في دالة جديدة. تصرف الطلاب في هذا المستوى نتج، على ما يبدو، من التركيز على الاستكشاف بواسطة التمثيلين الجبري والبياني الذي أتاحته جيوجبرا، وإغفال الاستكشاف بواسطة التمثيل الكلامي، وهذا يؤكد ما قالته كونسينسيا واوليفرا (Consciência & Oliveira, 2011) أن عدم استخدام الطلاب فعاليات استكشافية بواسطة أحد التمثيلات يؤدي إلى مشاكل لدى

الطلاب في مفهوم التحويلات. عدم قدرة هؤلاء الطلاب على التعامل مع التحويلات في دالة جديدة يشير إلى عدم تعاملهم مع التحويلات ككلية (Lage & Gaisman, 2006; Maharaj, 2010)، إعطاء الطلاب دوال مختلفة ومتنوعة ليجروا عليها التحويلات من الممكن أن يساعد الطلاب في التغلب على صعوبتهم في التعامل مع دوال جديدة (Lage & Gaisman, 2006).

ثماني طلاب (42%) كانوا بعد التجربة في مستوى سيرورة-كائن، في حين كان خمسة منهم قبل التجربة في مستوى فعل، اثنان في مستوى سيرورة-كائن وواحد كان في مستوى كائن. هذا يشير إلى أن خمسة من هؤلاء الطلاب حسنوا مستواهم بقدر كبير على الرغم من أنهم قد تعاملوا خلال التجربة مع دوال ليست بسيطة بالنسبة لهم، ممكن تفسير ذلك بناء على نفس التفسيرات أعلاه والتي تتلخص في إمكانات الأداة التكنولوجية المستخدمة وفي نوع الفعاليات المستخدمة والتي شجعت الطلاب على الاستكشاف الموجه والمستقل. اثنان من هؤلاء الطلاب بقوا في نفس المستوى ويفسر ذلك اعتمادا على الدوال التي تعامل معها الطلاب فهي دوال متقدمة بالنسبة لهم، وهذا يؤكد نتائج دراسات سابقة التي أشارت لصعوبات الطلاب في التعامل مع التحويلات في دوال بسيطة وفي دوال غير بسيطة (Baker, Hemenway & Trigueros, 2000; Eisenberg & Dreyfus, 1994). هذا الحالة تشابه حالة الطالب الذي قل مستواه، من المحتمل أن هذا الطالب لم يستطع تكييف نفسه للتكنولوجيا أو ربما نقصته المهارات التكنولوجية اللازمة للعمل بنجاعة في المهام المعطاة (Katz & Macklin, 2007).

الطلاب في هذا المستوى أغفلوا ثيمتين أساسيتين من الثيم المتعلقة بتحويلات الدوال : ثيمة ترتيب التحويلات والثيمة المتعلقة بها محور الانعكاس. إغفال الطلاب ثيمة ترتيب التحويلات نتج من عدم إعطاء الطلاب مهام استكشافية للانتقال من التمثيل الكلامي إلى التمثيليين الآخرين وبالتالي اكتشاف تأثير تغير ترتيب التحويلات على الرسم البياني للدالة وعلى تعبيره الجبري. أما إغفال الطلاب لثيمة محور الانعكاس فقد تكون ناتجة عن عدم

إعطاء الطلاب أسئلة تحويلات بها محور الانعكاس مختلف عن محور x. ولكي يستطيع الطلاب أن يعوا أهمية محور الانعكاس في التأثير على الدالة الناتج مفضل تنويع محاور الانعكاس في المهام الاستكشافية المعطاة لهم.

تطبيق الطلاب في مستوى سيرورة-كائن، والمتمثل بمعرفتهم كيفية إجراء التحويلات على دوال جديدة (الدالة النسبية في حالتنا) يدل أن الطلاب بدأوا يعون التحويلات ككلية، وبالتالي فهم يقتربون من مستوى كائن (Lage & Gaisman, 2006). ما ساعدهم على التقدم إلى هذا المستوى هو أن الأنشطة عن تحويلة معينة كانت تحوي كل التحويلات التي عرفها الطلاب من قبل. مشاكل الطلاب بالقيام بتحويلات على الدالة الجديدة (النسبية) نبعت من اختلاف الصيغة الجبرية للدالة الجديدة اختلافا غير معتاد على هؤلاء الطلاب، هذا الاختلاف يتمثل بأمرين: ظهور المتغير x في المقام، وكون الدالة الأصل لا تحوي متغيرات فقط وإنما أيضا أعداد.

ثلاثة طلاب (15.78%) كانوا بعد القيام بالتجربة في مستوى كائن. اثنان من هؤلاء الطلاب كانا قبل القيام بالتجربة في مستوى سيرورة، في حين كان الثالث في مستوى سيرورة-كائن. من هنا نرى أن هؤلاء الطلاب قد طوروا معرفتهم عن تحويلات الدوال على الرغم من أنهم قد تعاملوا معها في دوال غير بسيطة. الأداة التكنولوجية والمهام الاستكشافية ساعدتهم في تحقيق ذلك. تأثير الفعاليات الاستكشافية على فهم الطلاب للمفاهيم الرياضية مؤكد خلال الأدبيات البحثية (انظر مثلا Bishop, 1993; Nunes, 1993).

على ما يبدو، أن الطلاب الثلاثة الذين بلغوا مستوى كائن نجحوا، أكثر من الآخرين، في تكييف أنفسهم للأداة التكنولوجية وفي تكييف الأداة التكنولوجية لاحتياجات تعلمهم. وهذا قد يكون متأثر بصفات شخصية أو بتجارب سابقة مع التكنولوجيا ( Katz & Macklin, 2007).

بالنسبة لهيكلية كل مستوى من مستويات فهم الطلاب للتحويلات في الدوال وفقا لنظرية ف.س.ك.هـ. فإنها تختلف في الثيم التي لم تكن واضحة (حاضرة) عند وصف الطلاب

تحويلات الدوال كما هو مبين في النتائج. الثيم المختلفة المتعلقة بتحويلات الدوال مرتبطة مع بعضها البعض وتشكل ما سماه تول وفينر (Tall & Viner, 1981) صورة المفهوم لتحويلات الدوال. ما يميز هيكلية طلاب مستوى كائن وطلاب مستوى سيرورة-كائن هو قدرة العمل مع دالة جديدة، في حين يواجه طلاب مستوى سيرورة-كائن صعوبة في ترتيب التحويلات. في هيكلية جميع الطلاب المشتركين، كانت أنواع التحويلات، مقدارها واتجاهها واضحة وفي علاقات صحيحة، ساعدت التكنولوجيا الطلاب في فهم و بناء هذه العلاقات. إعطاء الطلاب دوال متنوعة وجديدة كشفت عن هيكليات الطلاب، وقد كشفت عن الثيم غير الواضحة والعلاقات غير الصحيحة بشكل خاص. العمل مع مهام استكشافية بمساعدة بيئة تكنولوجية ساعد الطلاب على ادراك معظم الثيم المتعلقة بالتحويلات، في حين من الممكن أن تساعد مهام محضرة وفقا للملاحظات المذكورة أعلاه في ادراك جميع الثيم المتعلقة بالتحويلات.

**استنتاجات وتوصيات:**

نتائج البحث الحالي تشير إلى أن طلاب الصف التاسع قادرون على العمل بنجاح وفي مستويات مختلفة مع دوال غير بسيطة وذات درجات أعلى مما اعتادوه (مثل: التكعيبية، القوة الرابعة، القيمة المطلقة). عادة، واجه الطلاب المشتركون صعوبات في التعامل مع دوال جديدة (في حالتنا الدالة النسبية). هذه النتائج تتوافق وتتعارض ما جاء في دراسات سابقة والتي بينت صعوبة تعامل الطلاب مع دوال من درجات عالية (كالتكعيبية، القوة الرابعة)، حتى وان كان تعاملهم معها في بيئة تكنولوجية (Eisenberg & Dreyfus, 1994)، ولكنهم في الدراسة المذكورة تعاملوا مع دوال تربيعية وكانت الدوال من درجات أعلى جديدة عليهم. التكنولوجيا، في حالتنا، ساعدت الطلاب على العمل مع دوال من درجات أعلى ولكنها ساعدت القليل منهم في العمل مع دوال من نوع مختلف (مثل الدالة النسبية).

بالإضافة إلى ما ذكرناه أعلاه، نتائج البحث الحالي تشير إلى إسهام الأداة التكنولوجية وتسهيلها عملية تعلم الطلاب وبالتالي فإننا نوصي بدمجها عند تعليم وتعلم موضوع

تحويلات الدوال. ذلك بالإضافة لتحضير مهام مناسبة تمتاز بالمميزات التالية: (1) مطروحة بالطريقة البنائية التي تمكن الطالب من بناء المفاهيم الرياضية المتعلقة بالتحويلات بنفسه، (2) تتطرق إلى مجال واسع ومتنوع من الدوال، (3) تتطرق إلى جميع الثيم المتعلقة بالتحويلات مثل محور الانعكاس، ترتيب التحويلات، إلخ، (4) مطروحة بشكل متسلسل بحيث يتم بناء كل مهمة بناء على المفاهيم المُضمنة في المهمة التي قبلها (5) تشمل على التمثيلات: الجبرية، البيانية والكلامية. الباحثان يدعيان أن تحضير مثل هذه المهام وفي بيئة تكنولوجية من الممكن أن يساعد كل الطلاب في الوصول إلى مستويات عالية من مستويات نظرية ف.س.ك.هـ.، من الممكن، بل ينبغي التحقق من هذا الادعاء في دراسات مستقبلية.

## ببليوغرافيا

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education, 2*, 1-32.

Baker, B., Hemenway, C., & Trigueros, M. (2001). On transformations of basic functions. In: H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra* (vol. 1, pp. 41–47). University of Melbourne.

Bishop, A.J. (1993). Influences from society. In A.J. Bishop, K. Hart, S. Lerman & T. Nunes (Eds.), *Significant influences on children's learning of mathematics* (pp. 3-26).

Bingham, A. D. (2007). Teaching transformations of functions using modern dance: An experiment pairing a modern dance class with college algebra. Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. February 22–25, 2007, San Diego- Mission Valley, California. http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/bingham.pdf

Borba, M. C., & Confrey, J. (1996). A students' construction of transformations of functions in a multi-representational environment. Educational Studies in Mathematics, 31(3), 319–337.

Consciência, M. & Oliveira, H. (2011). Function concept and functions' transformations: The role of the graphic calculator. CERME7, February 7-13, 2011, Rzeszów, Poland.

Diković, L (2009), Applications GeoGebra into teaching some topics of Mathematics at the College Level, *Computer Science and Information Systems , 6*(2), 191-203.

Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1994). On understanding how students learn to visualize function transformations. In: E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J.

Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (vol. 1, pp. 45–68). Providence, RI: American Mathematical Society.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (vol II, pp. 72–79). Assisi, Italy.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (2), 115–141.

Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 55-72.

Katalifou, A.-M. (2004). Transformation of functions: learning processes. In O. McNamara (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 24 (2), 45-50.

Katz, I.R. & Macklin, A.S. (2007). Information and Communication Technology (ICT) Literacy: Integration and Assessment in Higher Education. *Systemics, Cybernetics and Informatics, 5* (4), 50-55.

Kimani, P. M. & Masingila, J. O. (2006). Calculus students' perceptions of the relationship among the concepts of function transformation, function composition, and function inverse. In A. S., Cortina, J.L., Sáiz, and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, (vol. 2, pp. 23-30).

Lage, A. E. & Gaisman, M. T. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. In A. S., Cortina, J.L., Sáiz, and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American*

*Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, (vol. 2, pp. 68-70).

Maharaj, A. (2010). An APOS analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras*, 71, 41-52.

Nunes, T. (1993). The socio-cultural context of mathematical thinking: Research findings and educational implications. In A.J. Bishop, K. Hart, S. Lerman & T. Nunes (eds), *Significant Influences on Children's Learning of mathematics*, (pp. 27-42), Paris: UNESCO.

PBS MATHLINE (2013). *Toothpicks and Transformations (Quadratic Functions)*. http://www.pbs.org/teachers/mathline/lessonplans/pdf/hsmp/toothpicks.pdf

Schwarz, B. & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 259-291.

Smith, H. (2009). *Teaching and Learning Function Transformations*. Unpublished masters project. Arizona State University. http://pat-thompson.net/PDFversions/Theses/2009Smith.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (2), 151-169.

Weller, K., Arnon, I & Dubinski, E. (2011), Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Stretch: Strength and Stability of Belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(2), 129-159.

Zazkis, R., Liljedahl, P. & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of Function Translation: Obstacles, Intuitions, and Rerouting. *Journal of Mathematical Behaviour, 22*, 437–450.

**ملحق:**

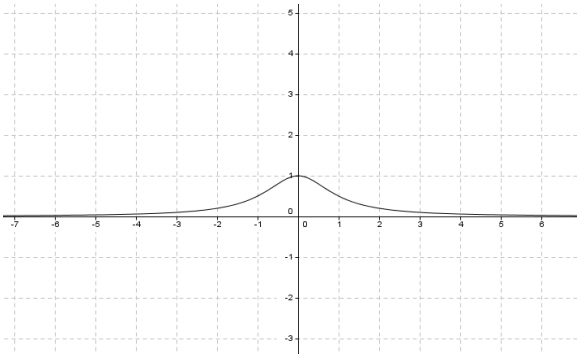
1. نريد أن نرسم كلا من الدوال التالية باستخدام التحويلات من الدالة الأصل. نريد أن نري الخطوات التي قمنا بها.

(أ) $f(x)= -(x-4)^4+7$

(ب) $f(x)= 4|x-3|+8$

(ت) $f(x)= -2(x+3)^3 +4$

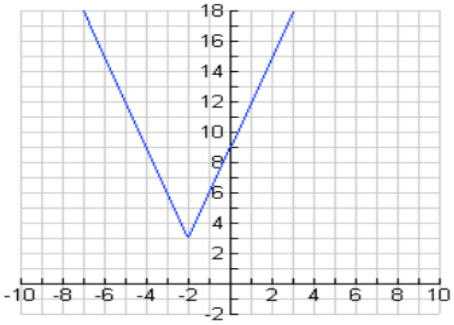
(ث) بالاعتماد على الرسم البياني للدالة: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



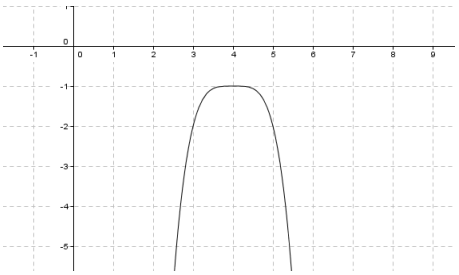
نريد أن نرسم الدالة $g(x) = \frac{-2}{1+(x-1)^2}$

2. نريد أن نكتب قانون كل من الرسوم البيانية التالية واصفين كلا من التحويلات التي قمنا بها بواسطة الرسم والجبر.

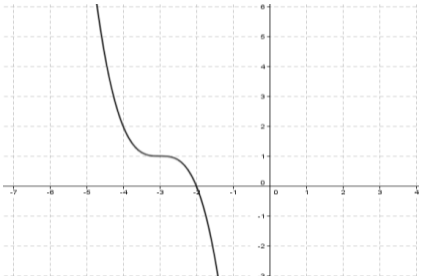
(أ)



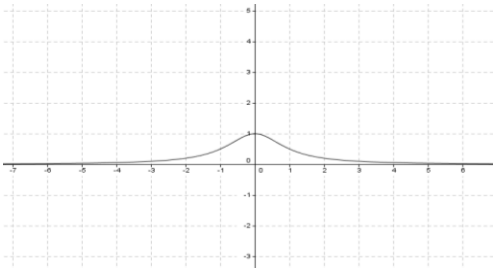
(ب)



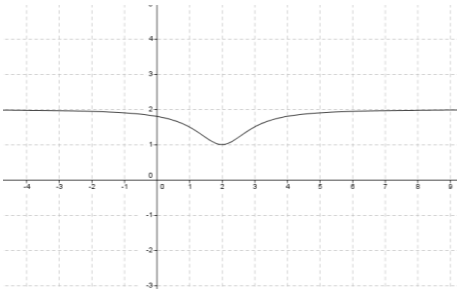
(ج)



(د) بالاعتماد على الرسم البياني للدالة: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



نريد أن نكتب قانون الدالة المرسومة أدناه:



# Ninth Grade Students' Perception of Function Transformations in a Dynamic Technological Environment


## Abstract:

Learning the topic of transformations helps students understand deeply the function concept that is a fundamental subject in mathematics. School and college students find learning the topic of transformations difficult, especially when these transformations are performed on non-basic functions. The current research attempts to examine $9^{th}$ grade students' understanding of the transformations concepts when these concepts are learned in a technological environment, specifically Geogebra environment. Nineteen $9^{th}$ grade students participated in the research. These were excellent students who used Geogebra to solve mathematical problems involving three transformations: translations, reflections and stretching. To analyze the students' perceptions of the three transformations, the APOS (action, process, object and schema) was used. The research findings indicated that the participants had different levels of understanding when they performed transformations of non-basic functions. Sixty percent of the participants had the object level of understanding or approaching it, while the rest (forty percent) were in the process level or near it. This research also found that there are between levels of understanding, which indicates the continuity of the APOS theory when it is used to analyze students' learning of mathematical concepts.