حوار رياضي

الدكتور علي عثمان

(هذا نموذج لدرس في الرياضيات، الطالب في مركزه، يحلل، يفكر، يعرض وجهات نظره، ينتقد ذاته، يصحح، يعمم، يبرهن ويعرف أهمية البرهان، يدقق في فهم النصوص، يشارك زملاءه، يبذل الجهود ويسأل، ويعرف كيف يسأل).

قال هيثم: سمعت من عبير أنه لو أخذنا عددا طبيعيا أيا كان وضربناه في 6 ثم جمعنا للناتج 1 فإننا سنحصل على عدد أولي.

فكر باهر قليلا وقال: إن كلام عبير هذا غير صحيح. فلو اخترنا مثلا العدد 4 وضربناه في 6 وجمعنا لحاصل الضرب 1 نحصل على 25 وهو عدد غير أولي.

قال هيثم: صحيح ما تقول فيبدو أني لا أذكر جيدا. ولكن ماذا لو اخترنا عددا طبيعيا وضربناه في 6 وطرحنا من حاصل الضرب1؟ مثلا:

6.1-1=5 , 6.2-1=11 , 6.3-1=17, 6.4-1=23 جميعها ، أعداد أولية

.

قال باهر: إنه أمر مدهش، لم أسمع بهذا من قبل. ولقد سمعت من معلمي أنه لا يعرف قانونا لمتوالية لانهائية جميع حدودها أعداد أولية.

قال هيثم: هيا نتصل بعبير ونعلمها بهذا.

وعندما اتصل هيثم بعبير قالت: يسعدني أن تكتشف نظرية ولكني أنبهك إلى أن هذا العدد من التجارب لا يكفي، فيجب البرهان.

شكر هيثم عبير على هذه النصيحة. جلس هيثم وباهر، هيثم يفكر بالبرهان وباهر بالفحص. بعد قليل أعلن باهر: هذه القضية خاطئة. فلو اخترنا العدد 20 مثلا فإن 20.6-1=119 ولكن 119=17.7 فهو ليس أوليا؟

وافق هيثم باهرا واتصل مرة أخرى بعبير ليعلمها بما توصلا إليه. عندها قالت عبير: إني أذكر أني قرأت بإحدى المجلات أن كل عدد أولي هو من الصورة 6n+1 أو 6n-1 ولكني لا أذكر البرهان.

أعلم هيثم باهرا بهذا. وهذه الجملة خاطئة أيضا، قال باهر. إذ أن العددين 2 و 3 ليسا

من هذه الصور. هيا اتصل بها وأخبرها بهذا.

قال هيثم: مهلا، لا أريد أن أحرجها أكثر وأنا أعرف أنها مشغولة في حل مسائل هندسية. هيا نفكر أولا بإثبات النظرية بالنسبة للأعداد الأولية الأكبر من 3 فأظن أنها تحقق النظرية. مثلا: $6.1+1=7$، $6.2-1=11$، $6.2+1=13$. بعد دقائق، قال هيثم: كل عدد طبيعي أكبر من 4 هو من الصورة:

$6n, 6n+1, 6n+2, 6n+3, 6n+4, 6n+5$،

ولكن عدد من الصورة $6n+5$ يمكن أن نكتبه بالصورة $6m-1$ (أي من الصورة $6n-1$). تدخل باهر وقال: $6n$ يقسم على 2، $6n+2$ يقسم على 2، $6n+3$ يقسم على 3، $6n+4$ يقسم على 2. قال هيثم: إذا فإن الأعداد التي ذكرتها ليست أولية؟

قال باهر: نعم، لذلك فالعدد الأولي يجب أن يكون من الصورة $6n+1$ أو $6n-1$ باستثناء 2 و 3، تشجع هيثم واتصل بعبير وأعلمها بما توصلا إليه.

قالت عبير: أشكركما جدا وما مع المسألة الأولى؟

قال هيثم: أية مسألة تعنين؟

قالت عبير: أعني المسألة أنه عند تعويض عدد طبيعي بدل n في الصورتين $6n+1$، $6n-1$ فإننا نحصل على عددين أحدهما على الأقل عدد أولي.

قال هيثم: لقد أخبرتك بأن هذه القضية خاطئة فلو عوضنا $n=20$ فإننا نحصل على: $20.6-1=119$، $20.2+1=121$.

قالت: شكرا شكرا، تذكرت.

قال باهر: يبدو أنها لا تكتفي بمثل واحد، هيا نجد قانونا لمتوالية لانهائية، عندما نعوض كل حد من حدودها في كلا الصورتين نحصل على عددين غير أوليين.

قال هيثم: إنك تبحث عن المشاكل، إنها مسألة جدية، و إني معجب بتفكيرك هذا.

قال باهر: هذا التفكير بسبب التحدي الذي أشعر به.

قال هيثم: لنبحث عن متوالية أعداد بحيث أن تعويض كل منها في $6n-1$ يعطي عددا غير أولي.

قال باهر: إني أرى هذه الصورة مثل a^2-1 وعندها $a^2-1=(a-1)(a+1)$ قال هيثم: قصدك أن تعوض $n=6k^2$.

قال باهر: أنا لم أقصد

هذا، بل أنت اكتشفت هذا، نعم فلو عوضنا $n=6k^2$ فإن : $6n-1=6*6k^2-1=(6k)^2-1 = (6k-1)(6k+1)$ فهو عدد غير أولي.

قال هيثم: وماذا تكون الصورة $6n+1$ عندها؟

أكمل هيثم: $6*6k^2+1=(6k)^2+1$

والآن متى يكون $(6k)^2+1$ عدداً غير أولي.

نظر هيثم وباهر نظرات تفكير وعجز أمام هذه المسألة. فجأة سمع الاثنان قرعا على الباب. وإذا بعبير تدخل.

قالت عبير: أتيت لأشارك في التفكير ولأعرض عليكم مسألة أتعبني التفكير فيها.

قال هيثم (مبتسما): لن نسمع مسألتك قبل أن نحل هذه المسألة.

قالت عبير: ما هي المسألة؟

قال هيثم: متى لا يكون $(6k)^2+1$ أوليا؟

نظرت عبير قليلا للمسألة وقالت: لو كان رقم آحاد $(6k)^2$ أربعة فإن رقم آحاد $(6k)^2+1$ يكون 5 وهذا العدد أكبر من 5 فهو ليس أوليا، لأنه يقسم على 5.

سر هيثم وباهر من ملاحظة عبير، التي قالت أيضا: سمعت مسألة مشابهة وهي: متى يكون a^2+1 عددا غير أولي؟

قال باهر: لنواصل قليلا وقال: يكون رقم آحاد $(6k)^2$ الرقم 4 عندما يكون رقم آحاد $6k$ إما 2 أو 8 وهذا يحدث عندما قيم k هي:

2، 7، 12، 17، ......

أو 3، 8، 13، 18، ......

الأولى هي متوالية عددية حدها العام: $k = 2 + 5 (m-1) = 5m – 3$

الثانية هي متوالية عددية حدها العام: $k = 3 + 5 (m-1) = 5m – 2$

والخلاصة: إنه لو عوضنا $n=6(5m-3)^2$ أو $n=6(5m-2)^2$ في الصورتين $6n-1$ أو $6n+1$ فإننا نحصل على عددين غير أوليين.

بهذا وجدنا مالا نهاية من الأعداد التي عندما نعوضها في الصورتين $6n-1$ ، $6n+1$ فإننا نحصل على عددين غير أوليين.

قالت عبير (بعد أن عرفت كل الحديث): هل توجد أعداد أخرى غير الأعداد التي في

هاتين المتواليتين؟

قال باهر: بالطبع العدد 20 مثلا.

قال هيثم: يبدو أننا توجهنا توجها معقدا في تحليلاتنا. المتوالية التي حدها العام $a_n = 6n+1$ هي متوالية لا نهائية، وكذلك المتوالية التي حدها العام $a_n = 6n-1$ هي متوالية لا نهائية أيضا. ونحن نعرف أن عدد الأعداد الأولية هو عدد نهائي، ألا تذكرون برهان المعلم لهذه القضية! لذلك فإن عدد الأعداد غير الأولية ذات الصورة 6n+1 هو عدد لا نهائي، وكذلك فإن عدد الأعداد غير الأولية ذات الصورة 6n-1 هو عدد لا نهائي.

قالت عبير: إن نظرية إقليدس التي برهنها المعلم أفادت بأن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة لا نهائية. فيبدو أنك لا تتذكر جيدا يا هيثم.

قال هيثم: سأتصل بالمعلم لأتأكد.

اتصل هيثم بالمعلم وسأله.

قال المعلم: لقد برهنا أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة لا نهائية.

قال هيثم: إني أذكر أنك قلت، نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة نهائية.

قال المعلم: لقد برهنا هذه النظرية بطريقة الفرض الخاطئ، افترضنا أن مجموعة الأعداد الأولية هي مجموعة نهائية وتوصلنا إلى تناقض، إني أقترح عليك دراسة البرهان بعمق أكبر، فيبدو أنك لم تفهمه جيدا.

قال هيثم: شكرا يا أستاذ، إني أجلس مع باهر وعبير ونبحث في الرياضيات. قال المعلم: إني أقترح عليكم دراسة وفهم برهان نظرية إقليدس التي تفيد بأن مجموعة الأعداد الأولية لانهائية، وحاولوا أن تبرهنوا حسب نفس الطريقة أن مجموعة الأعداد الأولية ذات الصورة 6n-1 هي أيضا مجموعة لانهائية.

قال هيثم: يا لها من مفاجأة، منذ ساعات ونحن نفكر في الأعداد التي من هذه الصورة ولقد أثبتنا وجود ما لا نهاية له من الأعداد غير الأولية من هذه الصورة.

قال المعلم: بورك فيكم.

حاولوا أن تبرهنوا وجود ما لا نهاية من الأعداد الأولية من هذه الصورة.

أبلغ هيثم صديقيه بفحوى حديث المعلم، درسوا برهان نظرية إقليدس.

باهر: هيا نفرض أن عدد الأعداد الأولية ذات الصورة 6n-1 هو عدد نهائي. نفرض أن هذه الأعداد هي: $P_1.\ P_2.\ \dots\ .P_k$.

لكي نصل إلى تناقض علينا إيجاد عدد من نفس الصورة بحيث أنه لا يقبل القسمة على أي عدد أولي.

العدد $P_1.\ P_2.\ \dots\ .P_k$. هو من الصورة 6k-1.

إن كان k فرديا وهو من الصورة 6k+1 إن كان k زوجيا. عندما نضيف له 1 فإننا نحصل على عدد زوجي. فالعدد الذي نبغي بناءه يختلف في صورته عن العدد الذي اقترح في برهان نظرية إقليدس.

قالت عبير: ماذا مع العددين 2 و3. لماذا لا ندخلهما في بناء العدد.

هيثم: أقترح أن نأخذ العدد:

$X=2P_1.\ \dots\dots\ P_k+3$.

عبير: قد يكون x من الصورة 6n-1 وقد يكون من الصورة 6n+1، تذكر أن علينا اختيار عدد من الصورة 6n-1.

هيثم: نختار العدد:

$X=6P_1.P_2.\ \dots\ P_k-1$

فمن الواضح أنه من الصورة 6n-1.

باهر: أجل، إن هذا العدد من الصورة 6n-1 وهو لا يقبل القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على أي عدد من الأعداد $P_1.\ \dots\ .P_k$.

هيثم: لذلك فهو عدد أولي. سأتصل بالمعلم. اتصل هيثم بالمعلم وأخبره بما توصلوا إليه.

المعلم: ولماذا x لا يقبل القسمة على عدد أولي من الصورة 6n+1 ؟

هيثم: يبدو أني تأثرت كثيرا ببرهان نظرية إقليدس. يبدو أنه توجد مرحلة إضافية هنا.

المعلم: نعم، ما بقي عليكم فحصه هو أمر في غاية السهولة، إلى اللقاء.

أبلغ هيثم صديقيه.

عبير: لقد فرضنا أن x غير أولي فهو قابل للتحليل

كضرب أعداد أولية $q_1, q_2, \ldots, q_j$. جميع هذه الأعداد يجب أن تكون من الصورة: $6n+1$

باهر: لكن ضرب أعداد من الصورة $6n+1$ هو عدد من نفس الصورة. بما أن X ليس من الصورة $6n-1$ لذلك فإن X لا يمكن أن يتحلل للعوامل. لذلك فإن X هو عدد أولي.

عبير وهيثم: وهذا يناقض الفرض. حيث أن X هذا يختلف عن جميع الأعداد $P_1, \ldots, P_k$.

قالت عبير: سأتصل وأخبره بهذا.

هيثم: اصبري قليلا، إنه حتما سيطلب منا أن نبرهن وجود عدد لانهائي من الأعداد الأولية ذات الصورة $6n+1$.

باهر: صحيح، كيف لم أفكر بهذا؟

عبير: أعتقد أن البرهان مشابه لهذا البرهان. فلو فرضنا أن عدد الأعداد الأولية ذات الصورة $6n+1$ هو عدد نهائي، وأن هذه الأعداد هي:

$P_1, P_2, \ldots, P_r$، ولو أمعنا النظر في العدد $X = 6P_1.P_2. \ldots .P_r + 1$ فهو أيضا من الصورة $6n+1$ ولا يقبل القسمة على 2، 3 ولا يقبل القسمة على أي من الأعداد $P_1, \ldots, P_r$ فلو فرضنا أن X ليس أوليا فهو قابل للتحليل كضرب أعداد أولية $q_1, \ldots, q_m$ جميعها من الصورة: $6n-1$ أي أن الآن: $X = q_1. \ldots .q_m$ $q_1. \ldots .q_m$ هو من الصورة $6n-1$ لكن لا يوجد عدد من الصورة $6n-1$ وهو أيضا من الصورة $6n+1$ سأتصل.

باهر: مهلا. إن كل ما قلته جميل إلا الجملة قبل الأخيرة. إن $q_1, \ldots, q_m$ هو من الصورة $6n+1$ عندما يكون m زوجيا.

هيثم: آه، يوجد خطأ في البرهان.

عبير: صدقت.

جلس الأصدقاء الثلاثة يفكرون في هذه المسألة وأخيراً قرروا الاتصال بمعلمهم.

اتصلت عبير بالمعلم وأخبرته بتفاصيل أبحاثهم.

المعلم: فعلا، يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأولية ذات الصورة $6n+1$ ولكن برهان هذه النظرية بحاجة إلى دراسة أعمق في نظرية الأعداد. أقترح اختيار العدد $X = (2P_1, \ldots, P_r)^2+3$. العدد X لا يقبل القسمة

على أي واحد من الأعـداد $2, 3, P_1, \ldots, P_r$. هناك نظرية تفيد بأنه إذا وجد Y بحيـث أن y^2+3 يقبـل القسمة على عدد أولي q فإن q يجـب أن يكـون مـن الصـورة $6n+1$.

بالاعتماد على هـذه النظريـة نستنتج أنه لا يوجـد عـدد أولـي مـن الصـورة $6n-1$ بحيـث أن X يقبل القسمة عليه. لذلك فإن X أولـي. وبمـا أن X يختلـف عـن جميع الأعداد $P_1, \ldots, P_r$ وبما أنـه مـن الصـورة $6n+1$ نصـل إلـى تناقض مع الفرض.

أخبرك أيضا بنظرية "ديريكليه" والتـي تقـول أن لكـل عـددين صحيحين موجبين وغـريبين a و b توجد مالا نهايـة مـن الأعـداد الأوليــة ذات الصــورة $a.n+b$. إن برهــان هــذه النظريــة معقــد ويحتاج إلى معلومات كثيرة في نظرية الأعداد.

إني أقترح عليكم البحث عـن هذه النظرية في المكتبة.

عبيــر: مــاذا تقصــد بعــددين غريبين؟

المعلم: هما عددان بحيث أن الكســر الـذي مقامـه أحـدهما وبسطه العدد الآخر غيـر قابـل للاختصار مثل (2,3)، (11,12)، (4.5).

شكرت عبير معلمهـا وحـدثت صديقيها عن فحوى حديثها مـع المعلم.

قال هيثم: وماذا عن المسألة التي أردت الاستفسار عنها حيث أتيت هنا؟

عبير: ألا زلت تـذكر! مسـألتي تبدو أسهل ممـا كنـتم تفكـرون فيــه. وهــي كالتــالي: معطــاة معادلة مستقيم من الصورة $ax + by = c$، ومعطـاة نقطـة (x_0,y_0) كيـف نعـرف بسـرعة إن كانـت النقطة واقعـة علـى المسـتقيم (وهذه سهلة) أو فوقه أو تحته، دون الحاجةإلى الرسم؟

قالا: نعدك أن نفكر بمسألتك غدا بعد أن نستريح قليلاً.