

تدريس الرياضيات

بطريقة الاكتشاف

بقلم: د. علي عثمان

قسم الرياضيات - جامعة حيفا

أستاذ الرياضيات - كلية الشريعة والدراسات الإسلامية - باقة الغربية

التصحيح .

إن رغبة التلاميذ في الاكتشاف تؤدي إلى قبولهم تعلم المهارات الحسابية والجبرية والتي هي بمثابة الوسيلة للوصول إلى الهدف المنشود. كما أن معرفتهم بوجود شكهم بجواز صدق الاكتشاف عموماً وجواز خطئه خصوصاً ، يدفعهم إلى تعلم الطرق التحليلية وتعلم طرق البرهان .

إن ما يؤخذ سلباً على تدريس الرياضيات في الجامعات هو انعدام طريقة الاكتشاف في التدريس . يشعر الطلاب في غالبيتهم بالضياع ، وينتقدون التعليم بقولهم : "كل الرياضيات هي مجرد تعاريف ، نظريات وبراهين ، وكل ما علينا عمله هو حفظ المادة غيباً" . يعود سبب ذلك لضخامة المادة المقرر تدريسها وضيق الوقت المخصص لها وكثرة الطلاب في المحاضرات . لكن الأمر مختلف

تتلخص طريقة الاكتشاف في تدريس الرياضيات بتوجيه الطلاب لحل المسائل عن طريق إجراء التجارب واستخلاص النتائج التي تقودهم إلى اكتشاف النظرية .

إذا حدث هذا واكتشف التلاميذ النظرية، فإن السعادة ستغمرهم بسبب شعورهم بالنصر وازدياد ثقتهم بأنفسهم . بعدها سيطلبون المزيد من التحديات وستزداد قدرة احتمالهم للمسائل. ولكن ، ينبغي أن يكون المعلم حكيماً في اختياره للمسألة ، إذ يجب أن تكون في مستوى قدراتهم، وعليه أن يكون فنانياً في توجيه إرشاداته المتعلقة بالزمن والإرشادات الأخرى التي تجعل التلاميذ يتفاعلون مع المسألة، فلا يسابق التلاميذ إلى اكتشاف النظرية أو الحل، معززاً بذلك نتائجهم الصحيحة الأولية، مُصلحاً للأخطاء التي يقع فيها بعضهم ومحفزاً البعض الآخر على

المسألة الأولى :

ما هو رقم آحاد العدد 2^{105} ؟

إن الآلة الحاسبة التي بين أيدي التلاميذ لن تسعفهم في حل هذه المسألة . إذ أن الآلة الحاسبة تقرب العدد 2^{105} إلى $4.056481921 \times 10^{31}$.

أي أن الآلة الحاسبة اعتبرت جميع الأرقام التي تأتي على يمين العدد 4056481921 ، والتي عددها 22 ، أصفاراً . ولكن بما هو معلوم فإن العدد 2^{105} لا يقبل القسمة على 5 أي أن رقم آحاده لا يمكن أن يكون صفراً .

توجيه المعلم : حلوا المسألة باستبدال العدد 105 مرة بالعدد 1 ، مرة بالعدد 2 ، مرة بالعدد 3 ، مرة بالعدد 4 ، ومرة بالعدد 5 ، وحاولوا استخلاص فكرة .

يتوصل التلاميذ إلى الجدول الآتي :

العدد	رقم آحاده
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	6
2^5	2
2^6	4
2^7	8
2^8	6

من السهل أن يلاحظ التلاميذ أن الأرقام (2,4,8,6) تعود على نفسها ، ومن السهل أن يكتشفوا أن رقم آحاد العدد 2^n هو 6 في حالة

في المدارس الابتدائية والإعدادية ، فلا وجود لمشكلة ضيق الوقت بالنسبة للمواد وأما مشكلة كثرة الطلاب فمن الممكن التغلب عليها عن طريق تقسيم التلاميذ إلى مجموعات عمل صغيرة . كذلك فإن المحاضر في الجامعة يفترض أن طلابه يرغبون تعلم الرياضيات وأن لديهم الخيال الواسع لتوقع النظريات والقدرة على التفكير المجرد .

إن هذه الأمور لا تتوفر في التلميذ الصغير وعلى المعلم أن يعمل على بنائها فيه . إحدى الوسائل المركزية هي تدريس موضوع الرياضيات حسب طريقة الاكتشاف .

أما في كليات إعداد المعلمين والتي تخرج المعلمين لتعليم تلاميذ المرحلتين الابتدائية والإعدادية ، فمن الواجب بناء المسابقات بشكل يسمح بتدريس بعض المواد بواسطة طريقة الاكتشاف ، حتى يتوجه تفكير معلم المستقبل إلى العمل على تنفيذ هذه الطريقة مع طلابه . ومن واجب المحاضرين في هذه الكليات معاينة مواد التدريس في المرحلتين الابتدائية والإعدادية والعمل مع طلابهم على إمكانية تدريس هذه المواد وفقاً لطريقة الاكتشاف .

سأورد فيما يلي بعض المسائل وحلها حسب طريقة الاكتشاف :

ومن السهل أن يكتشفوا أن عدد المباريات أقل بواحد من عدد اللاعبين ، وعليه فإن الجواب في حالة كون عدد اللاعبين 1000 هو 999 .

قد يلاحظ الطلاب أن عدد المباريات يساوي عدد المهزومين ، والأمر واضح فكل مهزوم سيشارك في مباراة واحدة فقط . ولكن ملاحظتهم هذه ، وهي ملاحظة حكيمة ، تأتي بعد معرفتهم للجواب ، وهذه الملاحظة هي عملياً برهان على صحة إجابتهم .

المسألة الثالثة :

من أجل أن يدخل الشخص إلى القصر فإن عليه اجتياز 5 بوابات . على كل بوابة يقف حارس ، يأخذ الحارس من الشخص نصف ما معه من نقود ويعطيه ديناراً واحداً ، كم كان في جعبة شخص دخل إلى القصر ومعه ديناران؟

بعد أن يوجه المعلم المسألة لتلاميذه يجد أنهم يتسابقون إلى الإجابة : كان معه ديناران. إن من عادة المعلم أن يسأل عن التفسير . وكعادتهم يقول الطلاب : نفحص ذلك . يباشر الطلاب في الفحص والمعلم غير مبالي لما يقولون لأنه يعلم أن جوابهم صحيح . كيف يواصل المعلم؟

هناك معلم ينتقل إلى شيء آخر ، قد يشجع

كون n من مضاعفات العدد 4 ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+1} هو 2 في حالة كون n من مضاعفات العدد 4 ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+2} هو 4 في حالة كون n من مضاعفات العدد 4 ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+3} هو 8 في حالة كون n من مضاعفات العدد 4 . من هنا يكتشفون بسهولة أن رقم آحاد العدد 2^{105} هو 2 لأن $105 = 4 \cdot 26 + 1$.

المسألة الثانية :

في التصفيات للفوز ببطولة تنس الطاولة يشترك 1000 لاعب . يشترك في كل مباراة لاعبان . كل مباراة تنتهي بفوز لاعب وخسارة اللاعب الآخر . اللاعب الخاسر في إحدى المباريات لا يشترك في مباريات أخرى ، والفائز يواصل المشوار . البطل هو اللاعب الذي لم يخسر في أية مباراة بعد أن خسر كل لاعب من اللاعبين الآخرين في إحدى المباريات كم مباراة ستجرى ؟

توجيه : حل المسألة باستبدال العدد 1000 بالعدد 1 مرة ، بالعدد 2 مرة ، بالعدد 3 مرة ، بالعدد 4 مرة ...

الجدول الذي سيتوصل إليه الطلاب :

عدد اللاعبين	عدد المباريات
2	1
3	2
4	3
5	4

مرمى الخصم في الدقائق الخمس الأولى .
المعلم يراقب سلوك طلابه . قد يلاحظ أن بعضهم قد أهملوا حل المسألة. عندها يتوجه إليهم ويوجههم إلى تصغير عدد البوابات من 5 إلى 1 ومن ثم إلى 2. عندما يكون عدد البوابات 1 فلا بد أن يلاحظ الطلاب أن $3=1+2$ وأن 2 هو نصف ما كان معه ، لذلك فقد كان معه 4 دنانير .

وهذه الفكرة تقودهم لحل المسألة في حالة كون عدد البوابات 2 فإن $4=1+3$. العدد 3 هو نصف ما كان معه . لذلك فقد كان معه 6 دنانير . وهكذا يتوصلون إلى طريقة الحل التراجعي ، ويكون جوابهم :

قبل البوابة الأولى كان معه 4 دنانير ، قبل الثانية كان معه 6 دنانير ، قبل الثالثة كان معه 10 دنانير ، قبل الرابعة كان معه 18 ديناراً . وقبل الخامسة كان معه 34 ديناراً . القاعدة التي قد ينطق بها الطلاب : نطرح 1 ونضرب الناتج في 2 .

من حل المسألة يتبين للطلاب أن "التخمين" طريقة قد يطول عدد مراحلها ، وتحتاج إلى الوقت الكثير ، ولذلك فإن اهتمامهم بالتفكير التحليلي سيأخذ بالازدياد .

المسألة الرابعة :

احسب المجموع الآتي: $1+3+5+ \dots + 97+99$

الطلاب بكلمة جميلة وقد لا يفعل . هناك معلم يعرف أن طلابه قد توصلوا إلى النتيجة عن طريق التخمين ، وفي نظره "التخمين" ليس طريقة رياضية ، فتراه يحملق في طلابه قائلاً : أريد طريقة لحل المسألة !! ماذا يحدث هنا! الطلاب حلوا المسألة ولم يحصلوا على أي تعزيز من معلمهم ، المعلم يشعر أنه لم يفد طلابه في شيء من عرضه لهذه المسألة من الناحية الرياضية . المسألة محلولة والمعلم يبحث عن حلها بطريقة رياضية . في هذه الحالة فإن المعلم يشعر بآثار الرياضيات هو موضوع صعب المراس ، نبحث فيه عن الطرق الصعبة لحل المسألة السهلة . ألا يسبب هذا إحباطاً لأفضل الطلاب!

أما المعلم الحكيم فإنه يفرح لفرح طلابه باكتشاف حل المسألة ، فالمسألة هي أحجية جميلة . يتوجه إلى طلابه بالسؤال : ماذا يكون الجواب لو استبدلنا العدد 5 بالعدد 10؟ بعد لحظات ينهض الطلاب يقولون : يبقى الجواب على ما هو ، حتى ولو استبدلت العدد 5 بالعدد 100 (أو بأي عدد آخر) .

يتوجه إلى طلابه بطلب آخر : أبقوا العدد 5 على حاله واستبدلوا كلمة "ديناران" بـ "ثلاثة دنانير" . بحماس شديد يتوجه الطلاب عازمين على حل المسألة ، أشبه بفريق أحرز هدفين في

يقوم الطلاب بإجراء التجارب :

$$1=1^2$$

$$1+3=4=2^2$$

$$1+3+5=9=3^2$$

$$1+3+5+7=16=4^2$$

يكتشف الطلاب أن مجموع الأعداد = تربيع عددها، وبما أن عدد الأعداد 99, 1, 3, 5, ... هو 50 لذلك فإن مجموعها يساوي 50^2 وهو يساوي 2500 .

قد يشك بعض الطلاب في صحة الادعاء بأن عدد الأعداد 50، ويمكن تفسير ذلك على النحو الآتي :

عدد الأعداد الطبيعية 100, 1, 2, 3, ... هو 100 نصفها زوجية ونصفها فردية ، لذلك فإن عدد الأعداد الفردية هو 50 والأعداد الفردية هي 1, 3, 5, ... , 99 .

ويمكن أن نعمم فنقول أن عدد الأعداد الفردية : $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ هو n ، لذلك فإن :

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$$

قد يسأل بعض الطلاب عن مجموع الأعداد الزوجية ، إن لم يحدث ذلك فيفضل أن يرشدكم المعلم لذلك .

ما هو مجموع الأعداد $2+4+6+\dots+100$ ؟

توجيه المعلم : أيهما أكبر $2+4+6+\dots+100$ أم $1+3+5+\dots+99$ ؟

قد يجيب الطلاب إجابة صحيحة ، وقد تسمع إجابة خاطئة . يُطلب منهم الإجابة عن

السؤال بالنسبة لـ : $2+4$ و $1+3$ وبالنسبة لـ $2+4+6$ و $1+3+5$ ، بعد هذا فإنهم سيتوصلون إلى النتيجة الصحيحة وهي :

$$1+3+\dots+99 \text{ عن } 2+4+\dots+100$$

وعليه فإن : $2+4+6+\dots+100 = 2550$.

ونستطيع أن نعم ذلك على النحو التالي :

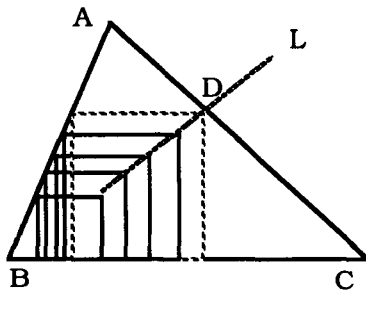
$$2+4+6+\dots+2n = n^2+n = n(n+1)$$

$$\text{هذا ينتج أن : } 1+2+3+\dots+n = n(n+1)/2$$

المسألة الخامسة :

معطى المثلث ABC أرسم داخل المثلث مربعاً بحيث يقع رأسان من رؤوسه على الضلع BC ، رأس على الضلع AB والرأس الرابع على الضلع AC .

توجيه : أرسم مربعاً بحيث يقع رأسان من رؤوسه على الضلع BC وأحد الرؤوس على الضلع AB . أجر التجربة عدة مرات .



سيكتشف

الطلاب أن

الرؤوس

الرابعة لهذه

المربعات تقع

على مستقيم

واحد L ، لذلك فلا بد للرأس الرابع للمربع

المطلوب أن يقع على هذا المستقيم . لذلك فإن

الرأس الرابع للمربع المطوب هو نقطة تقاطع

الحل : نبدأ بتقصي الأمور .

في نهاية العام الأول سيصير رأس المال 1.2 كغم من الذهب ، وهو رأس المال مع بداية العام الثاني . لذلك ففي نهاية العام الثاني سيصير رأس المال $(1.2)^2 = (1.2) * (1.2) + (0.2)$.

وينفس الطريقة نكتشف أن رأس المال في نهاية العام الثالث سيصير $(1.2)^3$ كغم من الذهب . من هنا نكتشف أن رأس المال سيصير في نهاية العام رقم n مساوياً $(1.2)^n$ كغم من الذهب . وباستعمال الحاسبة نجد أن : $(1.2)^{20} = 38.34$ تقريباً و $(1.2)^{50} = 9100$ تقريباً .

أي أن رأس المال سيصير بعد عشرين عاماً ما يقرب 38 كيلوغراماً و 340 غراماً من الذهب . وسيصير رأس المال بعد خمسين عاماً ما يضاها قليلاً 9100 كيلوغراماً من الذهب . إنه لأمر مدهش حقاً . فلو افترضنا أن رأس المال البدائي كان 50000 شيكلاً فإن رأس المال سيصير بعد 50 عاماً ما يضاها خمسة وأربعين مليوناً من الشواكل .

كثيراً ما تجد أناساً أتقياء قد أنعم الله عليهم ورزقهم رزقاً وفيراً ، هم عرضة لظن الناس بهم لسوء نزاهتهم ، رغم أنه لم يثبت من ذلك شيء من هذا الحساب قد يجد أولئك النزبهون دفاعاً عن نزاهتهم فيتقون ظن السوء

المسقيم L مع الضلع AC (النقطة D في الشكل) بعد أن وجدنا D ، ننزل منها عموداً على الضلع BC ونرسم منها موازياً للضلع BC وبواسطة القياس يتأكد الطلاب من صحة ما توصلوا إليه .

المسألة السادسة :

لنفرض أن إبناً لأبوين صالحين أنعم الله عليه بهداه فاستمع لنصح والديه فامتنع عن التدخين ومقابل ذلك اعتاد أن يوفر يومياً مبلغاً من المال يساوي ثمن علب السجائر الذي كان سيدفعه فيما لو لم يفعل ذلك (لنفرض أن ذلك 20 شيكلاً) لمدة خمسة أعوام . خلال هذه الفترة من الزمن فإنه سيدخر ما يقارب 36500 شيكلاً . (لأن $5 * 365 * 20 = 36500$ ، باعتبار أن العام 365 يوماً) . لنفرض أيضاً أن الوالدين كافأ ابنهما فأكملا المبلغ إلى ما يعادل 1 كيلوغراماً من الذهب . ولنفرض أن هذا الابن بدأ مشروعاً اقتصادياً برأس المال هذا (1 كيلوغرام ذهب) ، وأن الله سبحانه وتعالى بارك له في مشروعه ، وأن الابن سعى في السبل الشرعية من أجل أن يزيد رأس ماله بنسبة 20% عاماً بعد عام ، وأن الله يسر له الأمور وحقق له مسعاه ، فماذا سيصير رأس ماله بعد عشرين عاماً؟ بعد خمسين عاماً؟

ليس بعدد أولي لأن $89 * 23 = 2047$ هذا الأمر يحتم علينا برهان صحة النظريات التي نكتشفها .

إن من الأهداف التي يجب على معلم الرياضيات أن يعمل على تحقيقها في تلميذه ، أن يصير تلميذه قادراً على الاكتشاف في شتى مجالات العلوم ، محلاً للنتائج ورابطاً بينها ، عارفاً أن هناك العام وأن هناك الخاص ، عالماً أن هناك الممكن وأن هناك المستحيل ، لديه القدرة على توقع القضايا ، مدركاً جواز صواب القضية وجواز عكس ذلك وأن أمامه سبيلين إما البرهان وإما التفيد ، وأن إزالة شرط من شروط القضية يعني التعميم ، وأن إضافة شرط لشروط القضية معناه التخصيص ، فاهماً أن موضوع الرياضيات يُبنى على المصطلحات والبديهيات . وأن للمصطلح مفهوماً لا يقبل التأويل ، وأن البديهية غير قابلة للدحض ولا للبرهان ، وأن نفي البديهية لا يمكن دحضه ولا برهانه ، فمن الجائز اعتباره "بديهية" . عادة يؤخذ بالبديهية التي تتفق مع العقل الإنساني، وإذا أخذ بنفيها على أنه بديهية فإن ما يبني على أساسه صحيح من الناحية الرياضية ، وصحيح في عالم خيالي قد يدرك العقل الإنساني ماهيته فيما بعد .

بهم . إن توجيه هذه المسألة للطلاب من شأنه حثهم على عدم الإسراف ، تجنب التدخين ، ورفع معنويات الفقراء منهم . إذ تتعزز لديهم الآمال بتحسن أوضاعهم المالية مستقبلاً إذا عملوا بجد ومثابرة ، وإن السبيل بحاجة إلى الصبر ، فيسعون إلى التحلي به ، يطردون الحسد من نفوسهم فيتقون شروعه عليهم وعلى الناس وغضب الله عليهم .

إن الحلول والنتائج التي توصل إليها التلاميذ في المسائل الست السابقة هي نتائج صحيحة ، وإن هذه المسائل هي أمثلة لمسائل يمكن عرضها للتلاميذ في مراحل الدراسة الإعدادية وحتى الابتدائية . في مراحل متقدمة من واجب المعلم أن يلفت نظر تلاميذه إلى أن ليس كل ما يلمع ذهباً . فهناك قضايا يمكن أن يكتشفوها ويتبين أنها ليست صحيحة دائماً . لنضرب مثلاً على ذلك :

القضية : $2^p - 1$ هو عدد أولي لكل p أولي .
 نلاحظ أن $3 = 2^2 - 1$ عدد أولي ، $7 = 2^3 - 1$ عدد أولي ، $31 = 2^5 - 1$ عدد أولي ، $127 = 2^7 - 1$ عدد أولي . وقد يتسرع الطالب ويظن أن القضية هي قضية صواب دائماً ، ولكن عندما نفحص صحة القضية بالنسبة للعدد 11 نلاحظ أن $2^{11} - 1 = 2047$ وهو

مصادر

١. يحيى هندام ، تدريس الرياضيات، جامعة عين شمس ، دار النهضة العربية - القاهرة (١٩٨٥) .
٢. ج. بوليا ، البحث عن الحل ، ترجمة : أحمد سليم سعيدان ، دار مكتبة الحياة - بيروت (١٩٧٠) .