נוסחאות יפות בגאומטריה

עותמאן גאבר

תיאור הבעיה:

כפי שידוע ,נוסחת הירון משמשת ככלי יעיל לחישוב שטח משולש שאורכי צלעותיו נתונים. כמו כן קל לבדוק כי נוסחות השטח של המרובעים תלויות בד"כ בסוג המרובע בין אם זה מקבילית, טרפז, דלתון וכו' .נשאלת השאלה : במידה ונתונים אורכי צלעותיו של מרובע כללי כלשהו, האם ניתן לחשב את שטח מרובע זה?.
לא קשה לגלות כי ידיעת אורכי צלעותיו של מרובע אינם מספיקת לחישוב שטחו, וזאת מהסיבה הפשוטה שמארבע צלעות ניתן לבנות יותר ממרובע אחד ולכן אי אפשר לדבר על נוסחת שטח כללית למרובע שרק אורכי צלעותיו נתונים. במרובע כזה קל לגלות ששטחו משתנה בהתאם לזוויות .כלומר שטח המרובע תלוי גם בזוויותיו.
בהנחה ונתונים מידות הצלעות והזוויות במרובע כללי, מהי הנוסחה המבטאת את שטח במרובע?
זה מה שאנו מתכוונים לגלות במאמר זה. למעשה , אנו נראה כי ידיעת אורכי צלעות המרובע ורק מידות שתי זוויות נגדיות במרובע יספיקו לבניית נוסחת השטח.
אנו נדון גם במקרים פרטיים של נוסחה זו שממנה נגזרות גם נוסחת הירון ונוסחאות אחרות שנראה בהמשך.

פתרון הבעיה:

במהלך החישובים אנו ניעזר בעובדות הבאות:

1.0- במשולש ΔABC אשר אורכי צלעותיו הם a,b,c ובעל שטח S אשר חוסם מעגל בעל רדיוס R , מתקיים : $R=\dfrac{abc}{4S}$.

1.1- שטח משולש ΔABC : $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ כאשר a,b הם אורכי צלעות המשולש ו γ מבטאת גודל הזווית הכלואה ביניהם.

1.2- $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)$

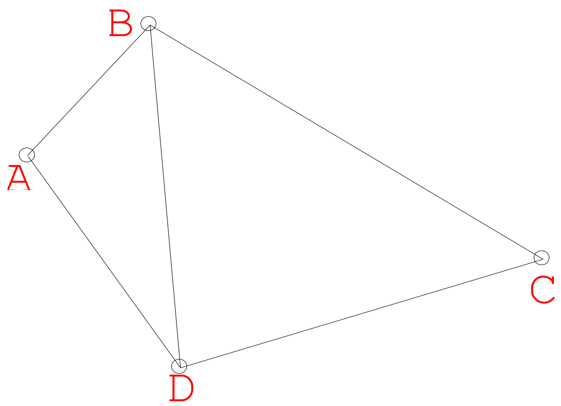
הסתכל באיור 1 . נסמן : $BD = l$, $\angle C = \beta$, $\angle A = \alpha$
, $AD = d$, $CD = c$, $BC = b$, $AB = a$.אזי הפעלת משפט הקוסינוסים על שני
המשולשים ΔBCD , ΔDAB נותנת את המשוואות:

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \qquad ; \qquad l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

שמהן מתקבלת המשוואה: $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$

$$\Leftrightarrow$$

1.3- $$ab\cos\alpha - cd\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2}$$



איור1

אם נסמן ב $S_{ABCD} = S$ את שטח המרובע $ABCD$ אז ברור שמתקיים :

$$S = S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{BCD}$$

(#) לפי 1.1: $S=\frac{1}{2}\left[ab\sin\alpha+cd\sin\beta\right]$ ולכן

$$S^2=\frac{1}{4}(ab\sin\alpha+cd\sin\beta)^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2\sin^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta+2abcd\sin\alpha\sin\beta\right)$$

נשתמש ב 1.2 ונכנס איברים:

$$S^2=\frac{1}{4}\left(a^2b^2\sin^2\alpha+c^2d^2\sin^2\beta+2abcd(\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta))\right)=$$
$$\frac{1}{4}\left(a^2b^2(1-\cos^2\alpha)+c^2d^2(1-\cos^2\beta)+2abcd\cos\alpha\cos\beta-2abcd\cos(\alpha+\beta)\right)=$$
$$\frac{1}{4}\left(a^2b^2+c^2d^2-a^2b^2\cos^2\alpha-c^2d^2\cos^2\beta+2abcd\cos\alpha\cos\beta-2abcd\cos(\alpha+\beta)\right)=$$
$$\frac{1}{4}\left(a^2b^2+c^2d^2-(ab\cos\alpha-cd\cos\beta)^2-2abcd\cos(\alpha+\beta)\right)=$$
$$(**)\qquad \frac{1}{4}\left((ab+cd)^2-(ab\cos\alpha-cd\cos\beta)^2-2abcd(\cos(\alpha+\beta)+1)\right)$$

לאחר שימוש ב 1.3 (**) ייראה כדלקמן :

$$S^2=\frac{1}{4}\left((ab+cd)^2-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4}\right)-\frac{abcd(1+\cos(\alpha+\beta))}{2}=$$
$$\frac{1}{16}\left((2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2\right)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})=$$
$$\frac{1}{16}\left((2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd+c^2+d^2-a^2-b^2)\right)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})=$$
$$\frac{1}{16}\left((a+b)^2-(c-d)^2\right)\left((c+d)^2-(a-b)^2\right)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})=$$
$$(***)\qquad \frac{1}{16}\left((a+b+c-d)(a+b+d-c)(c+d+a-b)(c+d+b-a)\right)-abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})=$$

אם נסמן $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ אז :

$$a+b+c-d = 2(p-d) \quad ; \quad a+b+d-c = 2(p-c)$$
$$c+d+a-b = 2(p-b) \quad ; \quad c+d+b-a = 2(p-a)$$

ולכן הביטוי (***) הופך לצורה :

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

או

-1.4

$$\boxed{S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}$$

<u>נוסחת שטח של מרובע לפי אלכסוניו</u>

ניתן להפיק גם נוסחת שטח של מרובע לפי אלכסוניו והזווית הכלואה ביניהם. לא קשה לגלות (תוך שימוש ב 1.1 לארבעת המשולשים הנוצרים מחיתוך שני אלכסוני המרובע) כי :

$$S = \frac{\ell_1 \cdot \ell_2 \cdot \sin\theta}{2} \qquad (2.3)$$

כאשר ℓ_1, ℓ_2 אלכסוני המרובע ו- θ היא הזווית הכלואה בין שני האלכסונים .

מסקנות:

- כאשר ניתן לחסום את המרובע בתוך מעגל אז סכום הזוויות הנגדיות שווה לשתי ישרות (180°), ואז : $\cos^2(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \cos^2(\frac{180^\circ}{2}) = 0$.

לכן נוסחת השטח של מרובע חסום בתוך מעגל היא :

-2.1

$$S^* = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

הערה : שים לב כאשר הקדקוד D שואף לקדקוד A, אזי $d \to 0$ והמצולע החסום במעגל מקבל צורת משולש שאורכי צלעותיו הם a,b,c . לפי נוסחה **2.1** כאשר $d \to 0$ אז הנוסחה מקבלת את הצורה :

-2.2

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

כאשר p בנוסחה 2.2 מקיים :

$$p = \lim_{d\to 0}\frac{a+b+c+d}{2} = \frac{a+b+c}{2}$$

וזוהי בדיוק נוסחת הירון לחישוב שטח משולש שאורכי צלעותיו הם a,b,c .

נתבונן בנוסחה (1.4). קל לבדוק כי:

$$p-a>0 \quad ; \quad p-b>0 \quad ; \quad p-c>0 \quad ; p-d>0$$

ולכן

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)>0$$

כמוכן קל לבדוק כי

$$abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \ge 0$$

לכן הביטוי מתחת לסימן השורש בנוסחה (1.4) מקבל ערך מקסימלי כאשר

$$abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$$

וזה מתקיים כאשר $\alpha+\beta=180^\circ$.

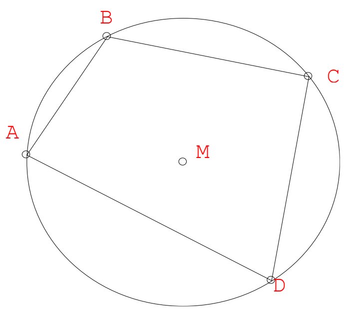
לכן, שטח מרובע, שאורכי צלעותיו נקבעו מראש : a,b,c,d , יהיה מקסימלי אם סכום שתי זוויות נגדיות בו שווה 180°, כלומר אם ניתן לחסום אותו בתוך מעגל.
במקרה זה נוסחת השטח (1.4) מקבלת את הצורה של (2.1)

$$S^*=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

נשאלת השאלה, איזה תנאי מקיימים a,b,c,d , כדי ששטח המרובע החסום יהיה גדול ביותר?
אנו נראה להלן כי , כאשר $a=b=c=d$ (כלומר במקרה של ריבוע) השטח יהיה גדול ביותר.

<u>מקסמיזציה של מרובע:</u>

ראינו קודם כי בהינתן אורכי צלעות מרובע , אז הוא יהיה בעל שטח מקסימלי אם ניתן לחסום אותו בתוך מעגל , ממשפחת המרובעים שניתנים לחסימה בתוך מעגל נראה כי הריבוע הוא בעל השטח הגדול ביותר.
לשם כך נניח כי a,b,c,d הם אורכי צלעותיו של מרובע $ABCD$ החסום במעגל (ראה איור 2)



איור 2

לפי (2.1)

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

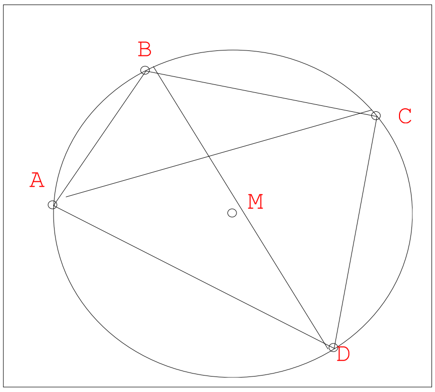
$$S = \sqrt[4]{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2(p-d)^2} \underset{\text{א-שוויון ממוצעים}}{\leq} \frac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2+(p-d)^2}{4}$$

שוויון מתקיים כאשר $p-a = p-b = p-c = p-d$ כלומר כאשר
$a = b = c = d$
לכן המקסימום מתקבל כאשר המרובע החסום במעגל הוא ריבוע.

<u>מרובע חסום במעגל:</u>

כמסקנה מהנוסחה הכללית 1.4 לחישוב שטח מרובע קיבלנו את נוסחה 2.1 . עכשיו אנו ננסה לגלות את הקשר בין אלכסוניו של מרובע חסום בתוך מעגל לבין צלעותיו.

נתבונן באיור 3 :נסמן: $BD = l_2$, $AC = l_1$
$AB = a\,, BC = b\,, CD = c\,, AD = d\,, \angle B = \alpha\,, \angle A = \beta\,.$ במשולשים
ΔBCD , ΔABD , לפי משפט הקוסינוסים , מתקיים :



1) $l_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

2) $l_1^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$

3) $l_2^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\beta$

4) $l_2^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\beta$

איור 3

משתי המשוואות הראשונות 1 ו- 2 נובע כי :

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\alpha$$

$$(*)\qquad \cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \qquad \Leftrightarrow$$

נציב את הביטוי (*) במשוואה 1 ונקבל:

ש

$$(3.1)\qquad l_1=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$$

ממשוואות 3 ו- 4 נובע כי :

$$(**)\qquad \cos\beta=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

נציב את הביטוי (**) במשוואה 3 ונקבל :

$$l_2^2=a^2+d^2-2ad\,\frac{(a^2+d^2-b^2-c^2)}{2(ad+bc)}=\frac{ad(a^2+d^2)+bc(a^2+d^2)-ad(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}=$$

$$=\frac{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)}{ad+bc}=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \qquad (3.2)$$

לפי (3.1) ו-(3.2) נקבל:

$$\boxed{l_1 \times l_2 = ac+bd \qquad (3.3)}$$

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2} = \frac{ad+bc}{ab+cd} \qquad (3.4)}$$

נניח כי R הוא רדיוס המעגל החוסם את המרובע $ABCD$ (ראה איור 3). נחלק מרובע זה לשני
משולשים : ΔABD , ΔBCD , שאף הם חסומים באותו מעגל עם רדיוס R.
עבור שני משולשים אלה , לפי 1.0 , מתקיים :

1) $$R = \frac{abl_1}{4S_{\Delta ABD}}$$

2) $$R = \frac{cdl_1}{4S_{\Delta BCD}}$$

משתי משוואות אלה נובע כי :

$$4R \cdot (S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD}) = (ab+cd) \cdot l_1$$

$$\Leftrightarrow \qquad 4R \cdot S_{ABCD} = (ab+cd) \cdot l_1$$

לפי 1.1- :

$$\Leftrightarrow \quad R=\frac{(ab+cd)\cdot l_1}{4S_{\Delta ABCD}}=\frac{(ab+cd)}{4S_{\Delta ABCD}}\cdot\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}=$$

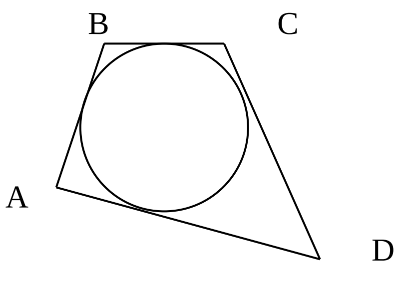
$$\Leftrightarrow \quad R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S_{\Delta ABCD}}$$

<u>סיכום :</u>

במרובע $ABCD$, שאורכי צלעותיו הם a,b,c,d ואלכסוניו l_1,l_2 , החסום במעגל בעל רדיוס R מתקיים :

- $S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$
- $l_1=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$
- $l_2=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$
- $l_1\times l_2=ac+bd$
- $\frac{l_1}{l_2}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$
- $R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S_{ABCD}}$

<u>מרובע חוסם מעגל</u>



איור 4

יהי $ABCD$ מרובע שאורכי צלעותיו a,b,c,d , α ו- β שתי זוויות נגדיות ($\angle B=\alpha\ ,\ \angle D=\beta$) $AB=a\ ,\ BC=b\ ,\ CD=c\ ,\ AD=d$ (ראה איור 4) .
נניח כי מרובע זה חוסם בתוכו מעגל.
לפי נוסחה (1.4) שטח מרובע זה הוא:

$$S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

אבל ידוע כי במרובע אשר חוסם בתוכו מעגל, סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
לכן מתקיים: $a+c=b+d$ (4.0) .
נשתמש בעובדה זו כדי לפשט את הביטוי שמופיע מתחת לסימן השורש בנוסחת השטח S_{ABCD}
של המרובע לעיל.

$$p-a=\frac{a+b+c+d}{2}-a=\frac{b+c+d-a}{2}=c$$

באופן דומה , תוך שימוש ב (4.0) נובע כי :
$p-b=d \quad ; \quad p-c=a \quad ; \quad p-d=b$

ואז נוסחת השטח של המרובע החוסם את המעגל מקבלת את הצורה :

$$S_{ABCD}=\sqrt{abcd-abcd\cdot\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\sqrt{abcd(1-\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\sqrt{abcd}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{S_{ABCD}=\sqrt{abcd}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \qquad (4.1)$$

<u>הערה :</u>

- מאחר ו $a,b,c,d>0$ ו- $S_{ABCD}>0$, אז מרובע זה הוא בעל שטח מקסימלי כאשר

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+\beta=180^{\circ} \ .$$

כלומר השטח הוא מקסימלי אם המרובע ניתן לחסימה בתוך מעגל. במקרה זה השטח הוא :

$$S_{ABCD}=\sqrt{abcd}$$

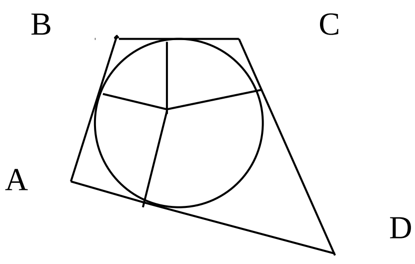
לא קשה לגלות כי תוך שימוש באי-שוויון הממוצעים ,המקסימום שטח של המרובע מתקבל כאשר $a=b=c=d$ (כלומר במקרה של ריבוע) כי :

$$S_{ABCD}=\sqrt{abcd}\cdot\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le\sqrt{abcd}=\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}\le\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$$

ושוויון כמובן מתקבל כאשר $a=b=c=d$.

נמצא עתה ביטוי עבור אורך הרדיוס r של המעגל החסום במרובע $ABCD$ המתואר לעיל.

$$S_{ABCD}=\frac{a\cdot r}{2}+\frac{b\cdot r}{2}+\frac{c\cdot r}{2}+\frac{d\cdot r}{2}=r\cdot\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)=r\cdot p$$



מכאן נוסחת אורך הרדיוס של המעגל החסום במרובע $ABCD$ היא :

$$\boxed{r=\frac{S_{ABCD}}{p}}$$

סיכום :

במרובע $ABCD$, שאורכי צלעותיו הם a,b,c,d , החוסם בתוכו מעגל בעל רדיוס r מתקיים :

- $$S_{ABCD} = \sqrt{abcd} \cdot \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$
- $$r = \frac{S_{ABCD}}{p}$$

במאמר זה קיבלנו נוסחה לחישוב שטח מרובע כללי כאשר נתונים אורכי צלעותיו ושתי זוויות נגדיות.כמוכן הצלחנו לגלות קשר בין אלכסוני מרובע חסום במעגל לבין צלעותיו ,בנוסף קיבלנו נוסחות שונות למקרים פרטיים כאשר המרובע חוסם או חסום במעגל . הצלחנו גם לבטא שטח מרובע חסום במעגל באמצעות אורכי צלעותיו (ראה 2.1) .

ידוע לנו כי במשולש (שניתן כמובן לחסום במעגל) ניתן לבטא שטח משולש זה באמצעות אורכי צלעותיו(נוסחת הירון), כאן הראנו כי גם במרובע חסום במעגל ניתן לבטא את שטחו באמצעות צלעותיו נשאלת השאלה האם ניתן לבטא שטח מצולע כללי בעל n צלעות $(n \geq 5)$ באמצעות אורכי צלעותיו בלבד?

שאלה לא טרביאלית שמחפשת תשובה .

وصف القضية:

كما هو معلوم, فان قانون هيرون يعتبر اداة ناجعة لحساب مساحة مثلث اذا علم فيه اطوال اضلاعه. كما انه من السهل ملاحظة ان قوانين المساحة الخاصة بالأشكال الرباعية متعلقة بشكل عام بنوع الشكل الرباعي, سواءً كان متوازي اضلاع, شبه منحرف , دالتون الخ. هنا يثار السؤال الاتي: فرضاً أن اطوال أضلاع شكل رباعي معطاة, فهل يمكن حساب مساحته ؟

ليس من الصعب اكتشاف ان معرفة اطوال اضلاع شكل رباعي عام ليست كافية لحساب مساحته, لأنه بمعلومية أربعة اضلاع فقط فانه يمكن بناء اكثر من شكل رباعي واحد بمساحات مختلفة, لذلك لا يمكننا الحديث عن قانون مساحة لشكل رباعي عام بمعلومية اطوال اضلاعه فقط. في مثل ذلك الشكل , من السهل ملاحظة ان مساحته تتغير وفقاً لزواياه , اي ان مساحة الشكل الرباعي متعلقة ايضا بزواياه.

فرضا ان اطوال اضلاع شكل رباعي وقياس زواياه معطاة , ما هو قانون مساحة ذلك الشكل؟

في هذا المقال سنجيب على هذا السؤال. في الواقع , سنرى ان معرفة اطوال اضلاع الشكل الرباعي وزوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة فيه يكفي لبناء قانون المساحة.

سنبحث ايضا في بعض الحالات الخاصة لذلك القانون الذي سيستنبط منه قانون هيرون الشهير, بالاضافة الى بعض القوانين الاخرى التي سنراها لاحقاً.