Rabi' رياضيات حسب الطريقة الاكتشافية

بقلم: د. علي عثمان

أَصِفُ في هذا المقال دروسا في الرياضيات حسب الطريقة الاكتشافية الموجهة وهي تناسب صفوف الخامس – السابع. المعلم يوجه الطلاب لحل المشكلة يشجع أحيانا ويتدخل قليلا أما الطلاب فإنهم يبحثون، يفكرون، يجيبون، يصححون أخطاء بعضهم ويعملون في مجموعات، وعندما يتوصلون إلى نتيجة يسجلها المعلم وينبه إلى أهميتها. من المهم جدا أن يحضر المعلم نفسه جيدا قبل الدرس. يحاول باجتهاد توقع أسئلة الطلاب وكيف يتصرف حيالها، وماذا عليه أن يعمل عندما يأخذ الدرس بالتشعب باتجاهات شتى لا يريدها، وأن يحضر أسئلة يفحص فيها مدى استيعاب الطلاب للأمور التي يكتشفها أو يصلحها قسم من زملائهم. إن التعليم حسب الطريقة الاكتشافية مع تقسيم الطلاب إلى مجموعات عمل مع تحضير جيد للمعلم من شأنه تحفيز الطلاب إلى حب الموضوع وفهمه وتذكره ويساعد على تطور التفكير والتحليل والإبداع عند الطلاب.

قصة درس (نقاش واكتشاف)

(ضرب عددين متتاليين، مربع تام، جذر تربيعي)

افتتاحية الدرس من قبل المعلم:

17*13=221	,	18*14=252	,	15*15=225
19*27=513	,	23*76=1748	,	16*16=256
22*23=506	,	22*28=616	,	17*17=289

نلاحظ أن رقم آحاد حاصل ضرب عددين يساوي رقم آحاد حاصل ضرب رقمي آحاد العددين.

نلاحظ أن رقم آحاد تربيع العدد (حاصل ضرب العدد في نفسه) يساوي رقم آحاد تربيع رقم آحاد العدد.

1. **جد بدون إجراء الحسابات المعقدة** (وبدون استعمال الحاسب) رقم آحاد حاصل الضرب:

أ. 321*458	ب. 227*149	حـ. 514*312
د. 129*128	هـ. 954*724	و. 352*678

2. **جد رقم آحاد حاصل ضرب العدد في نفسه** (أو تربيع العدد):

أ. 56*56	ب. 28*28	حـ. 129*129
د. 3578^2	هـ. 6589^2	و. 7118954^2

ما هو رقم آحاد حاصل ضرب عددين متتاليين؟

عندما نضرب عددين متتاليين فماذا يحتمل أن يكون رقم الآحاد؟

نراقب الجدول الآتي:

رقم آحاد العدد الصغير	رقم آحاد العدد الكبير	رقم آحاد حاصل الضرب
0	1	0
1	2	2
2	3	6
3	4	2
4	5	0
5	6	0
6	7	2
7	8	6
8	9	2
9	0	0

3. **نستنتج**: عندما نضرب عددين متتاليين فإن رقم آحاد حاصل ضربهما هو أحد الأرقام: 0 , 2 , 6 .

أجب عن الأسئلة الآتية:

1. هل يوجد عددان متتاليان بحيث أن حاصل ضربهما يساوي 72؟ ما هما؟
2. هل يوجد عددان متتاليان بحيث أن حاصل ضربهما يساوي 158؟
3. هل يوجد عددان متتاليان بحيث أن حاصل ضربهما يساوي 7895؟
4. هل يوجد عددان متتاليان بحيث أن حاصل ضربهما يساوي 57971؟

ملاحظة: عندما نضرب عددين متتاليين فإن رقم آحاد حاصل ضربهما لا يمكن أن يكون أحد الأرقام 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9 .

4. **ادعى يوسف** أن كل عدد رقم آحاده 6 يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين. هل صدق يوسف في ادعائه؟

قال حسين: إن ادعاء يوسف ليس صحيحاً، مثلاً العدد 16 هو عدد رقم آحاده 6، ولا يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما 16.

والعدد 26 والعدد 36 والعدد 46 والعدد 66 أي منهم لا يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين.

قالت شيرين: إذا كان رقم آحاد العدد إما 1 وإما 3 وإما 4 وإما 5 وإما 7 وإما 8 وإما 9 فإن العدد لا يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين. وعندما يكون رقم الآحاد 0 أو 2 أو 6 فيجب أن نفحص:

1. هل يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 7289347 ؟
2. هل يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 8954324 ؟
3. هل يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 11111118 ؟

حنين طالبة ذكية، بسبب ظرف ما دخلت إلى الصف متأخرة و لم تسمع حديث يوسف، حسين وشيرين. كان **جواب حنين** على قسم أ:

حاصل ضرب عددين متتاليين هو عدد زوجي لأن أحد العددين يجب أن يكون زوجياً وهذا العدد رقم آحاده 7 فهو فردي، لذلك فلا يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما 7289347 .

قال المعلم: أحسنتِ. وضح المعلم مرة أخرى، وطلب من حنين أن تجيب عن قسم ب.

فقالت حنين: نعم يوجد، لأن هذا العدد زوجي لأن رقم آحاده 4.

قال يوسف: لكن ليس كل عدد زوجي يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين، مثلاً العدد 8 والعدد 10 والعدد 14 أي منهم ليس حاصل ضرب عددين متتاليين.

قال المعلم: أحسنت يا يوسف.

قال يوسف: إني أشكر حسين الذي علمني أن أفكر بهذه الصورة.

عاد المعلم ووضح الأمر، أما حنين فأكدت أنها ستدرس المادة.

قال طارق: هناك أمر يحيرني، كيف نعرف إن كان العدد الذي رقم آحاده 0 أو 2 و 6 يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين؟

قالت شيرين: نفحص.

قال حسين: وإذا كان العدد كبيراً فإن الفحص قد يطول.

قال المعلم: سؤال جميل، عندها نستعمل "الحاسبة". سأشرح لكم هذا في الدرس القادم بشرط أن تحضروا حاسباتكم.

الدرس الثاني: في الدرس التالي سجل المعلم الجدول التالي:

1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7

وسأل: ما العلاقة بين الأعداد التي في العمود الأول والأعداد التي في العمود الثاني؟

عرف الطلاب أن كل عدد في العمود الأيسر هو تربيع العدد المقابل له في العمود الأيمن (تربيع العدد = حاصل ضرب العدد في نفسه).

تربيع العدد $2 = 2^2 = 2*2 = 4$

تربيع العدد $3 = 3^2 = 3*3 = 9$

تربيع العدد $4 = 4^2 = 4*4 = 16$

تربيع العدد $5 = 5^2 = 5*5 = 25$

(ذكر المعلم أن كلمة تربيع جاءت من "مربع" فإذا كان طول ضلع المربع 3سم فإن مساحته 3^2 سم^2 = 9 سم^2).

العدد 9 هو تربيع العدد 3، ماذا يكون العدد 3 للعدد 9؟

قال أمجد: هو العدد الذي تربيعه 9، والعدد 4 هو العدد الذي تربيعه يساوي 16، والعدد 2 هو العدد الذي تربيعه يساوي 4.

قال المعلم: صحيح. هناك تعريف آخر لهذه العلاقة هي "الجذر التربيعي" .

العدد 2 هو الجذر التربيعي للعدد 4.

العدد 3 هو الجذر التربيعي للعدد 9.

راقبوا هذا الجدول

العدد	الجذر التربيعي
1	1
4	2
9	3
16	4
25	5
36	6
49	7
64	8
81	9
100	10

لاحظ التلاميذ أن المعلم لم يسجل الأعداد 2،3،5،6،7 ... في العمود الأيمن، فسأل الطلاب معلمهم عن سبب ذلك!

قال أمجد: لا يوجد جذر تربيعي للعدد 2 لأنه لا يوجد عدد عندما نضربه في نفسه نحصل على 2.

قال المعلم: أحسنت، لكن عليك أن تدقق أكثر: لا يوجد عدد صحيح عندما نضربه في نفسه نحصل على 2. **الجذور التربيعية للأعداد التي لم أسجلها ليست أعداداً صحيحة.**

سألت هالة: كم يساوي الجذر التربيعي للعدد 2 ؟

قال المعلم: باستعمال الحاسبة نستطيع حساب الجذور التربيعية. إذا لم يكن الجذر التربيعي صحيحا فإن الجواب الذي يظهر على الشاشة هو جواب تقريبي. أنظروا إلى الإشارة √ التي تظهر على أحد الأزرار. نسجل العدد الذي نريد إيجاد جذره التربيعي ثم نضغط على √ (وفي حاسبات أخرى نضغط على √ ثم نسجل العدد، يجب الانتباه!) على الشاشة يظهر الجذر التربيعي (أو الجذر التربيعي المقرب).

√1=1، √4=2، √9=3، √49=7، √144=12، √256=16، √324=18

√2=1.414213562 (تقريبا)، √7=2.645751311 (تقريبا).

قال المعلم: نعود الآن إلى سؤال طارق من الدرس السابق (طلب من الطلاب أن يذكروا مسألة طارق).

هل يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما يساوي 5402؟

نحسب الجذر التربيعي باستعمال الحاسبة، نحصل على:

√5402=73.4982993 تقريباً.

العددان المتتاليان (إن وجدا) هما العددان الصحيحان المجاوران لهذا العدد (العددان الصحيحان الأقرب من هذا العدد أحدهما أكبر منه والآخر أصغر) فإذا وجد عددان يحققان ما نريد فإن أحدهما هو 73 والآخر 74. نحسب الآن 73*74=5402، فالعددان هما 73، 74.

سؤال آخر: هل يوجد عددان متتاليان حاصل ضربهما 6165؟

نحسب √6165 فنجد أنه يساوي تقريبا 78.51751397 ، لذلك فإن العددين المتوقعين هما 78 و 79، نحسب حاصل ضربهما: 78*79=6162، الجواب يختلف عن 6165 لذلك فإن هذا العدد لا يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين.

قال حسين: بما أن رقم آحاد هذا العدد 5 وهو يختلف عن الأرقام 0,2,6 فإن هذا العدد لا يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين.

قال المعلم: حسن، هذا يؤكد أن ما نقوم به صحيح.

سؤال: افحص إن كان العدد يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين وجد العددين عندما يكون الجواب إيجابيا؟

أ.552	ب.756.	حـ.1122	د.2072
هـ.23562	و.23576	ز.2209	ح.5041

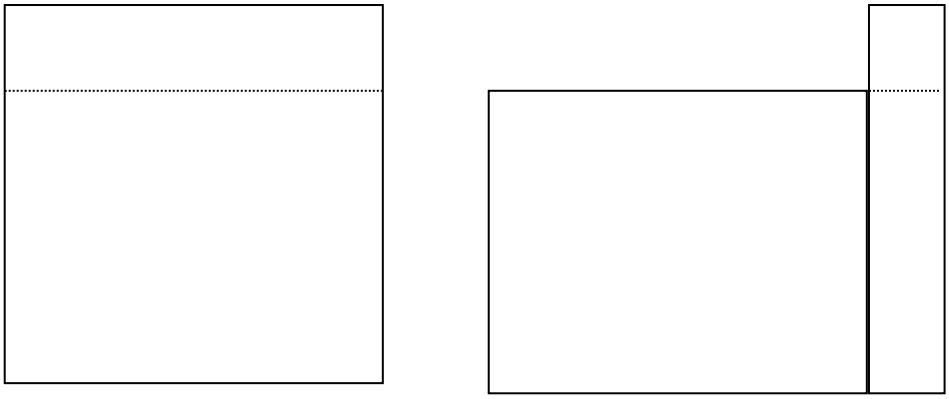
عندما حل الطلاب قسم "ز" تحيروا عندما وجدوا أن الجذر التربيعي للعدد 2209 هو عدد صحيح وهو يساوي 47. العددان الصحيحان المجاوران هما 46 و 48 والفرق بينهما هو 2. نستنتج من هذا أن العدد الذي جذره التربيعي هو عدد صحيح لا يمكن أن يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين.

قال المعلم: العدد الذي جذره التربيعي صحيح يسمى "مربعا تاما".

الأعداد 1,4,9,16,25,49,...,144,169,225, ... هي مربعات تامة. وكما فسرتم فإن المربع التام لا يساوي حاصل ضرب عددين متتاليين.

قالت سائدة: لقد حسبت 48*46 وحصلت على 2208 وهذا العدد أقل بواحد من العدد 2209. وقد فحصت هذا الأمر بالنسبة للعدد 225، فإن جذره التربيعي 15 والعددان المجاوران هما 14 و16 حاصل ضربهما يساوي 224 وهو أقل بواحد من العدد 225.

قال المعلم أن ملاحظة سائدة ممتازة. طلب من الطلاب أن يصنع كل منهم مربعاً من الكرتون وأن يقص من المربع مستطيلا بعرض 1سم، كما هو مبين في الشكل أ.



الشكل أ **الشكل ب**

ثم طلب إلصاق المستطيل الذي تم قصه على امتداد الضلع الجانبي للمربع، كما ترى في الشكل ب. نلاحظ أنه في (الشكل ب) نتج مستطيل ومربع طول ضلعه 1سم.

طول المستطيل الناتج يزيد اسم عن طول ضلع المربع ، وعرض المستطيل يقل اسم عن طول ضلع المربع، وهذا يفسر ملاحظة سائدة.

جاء الآن دور عايد ليسأل: لقد عرفنا ماذا يجب أن يكون رقم آحاد حاصل ضرب عددين متتاليين، فماذا يجب أن يكون رقم آحاد المربع التام؟

ذكّر المعلم الطلاب بأن رقم آحاد حاصل ضرب عددين يساوي رقم آحاد حاصل ضرب رقمي آحاد حاصل ضرب رقم آحادهما، لذلك فإن رقم آحاد تربيع العدد يساوي رقم آحاد تربيع العدد يساوي رقم آحاد تربيع رقم الآحاد. بما أن:

0*0=0 ، 1*1= 1 ، 2*2=4 ، 3*3=9 ، 4*4=16 ، 5*5=25 ، 6*6=36 ، 7*7=49 ، 8*8=64 ، 9*9=81 ، فإن رقم آحاد المربع التام يجب أن يكون أحد الأرقام :

. 9،6،5،4،1،0

العدد الذي رقم آحاده هو أحد الأعداد : 8،7،3،2 ليس مربعاً تاما.

العدد 57298 ليس مربعا تاما، العدد 111112 ليس مربعا تاما، أيضا العدد 46 ليس مربعا تاما بالرغم من أن رقم آحاده 6.

2. اكتشف ... (مجموع أعداد متتالية)

1. مجموع عددين متتاليين:

4+5=9 , 3+4=7 , 2+3=5 , 1+2=3

18+19=37 , 17+18=35 , 31+32=63 , 20+21=41

نلاحظ أن: مجموع عددين متتاليين هو عدد .....

عندما نقسم مجموع عددين متتاليين على 2 يكون الباقي .....

2. مجموع ثلاثة أعداد متتالية:

3+4+5=12 , 2+3+4=9 , 1+2+3=6

6+7+8=21 , 5+6+7=18 , 4+5+6=15

13+14+15=42 , 12+13+14=39 , 11+12+13=36

نلاحظ أن مجموع ثلاثة أعداد متتالية هو عدد من مضاعفات .....

عندما يكون العدد الأصغر فرديا فإن المجموع هو عدد من مضاعفات .....

عندما يكون العدد الأصغر زوجيا فإن المجموع هو عدد .....

3. مجموع أربعة أعداد متتالية:

3+4+5+6=18 , 2+3+4+5=14 , 1+2+3+4=10

6+7+8+9=30 , 5+6+7+8=26 , 4+5+6+7=22

نلاحظ أن مجموع أربعة أعداد متتالية هو عدد .....

عندما نقسم مجموع أربعة أعداد متتالية على 4 يكون الباقي .....

4. مجموع خمسة أعداد متتالية:

3+4+5+6+7=25 , 2+3+4+5+6=20 , 1+2+3+4+5=15

17+18+19+20+21=95 , 5+6+7+8+9=35 , 4+5+6+7+8=30

نلاحظ أن مجموع خمسة أعداد متتالية هو عدد من مضاعفات العدد .....

عندما يكون العدد الأصغر فرديا فإن المجموع هو عدد .....

عندما يكون العدد الأصغر زوجيا فإن المجموع هو عدد من مضاعفات .....

5. مجموع ستة أعداد متتالية:

2+3+4+5+6+7=27 , 1+2+3+4+5+6=21

4+5+6+7+8+9=39 , 3+4+5+6+7+8=33

نلاحظ أن مجموع ستة أعداد متتالية هو عدد من مضاعفات العدد .....

وهو أيضا عدد فردي

عندما نقسم مجموع ستة أعداد متتالية على 6 فإن الباقي هو .....

6. مجموع سبعة أعداد متتالية:

2+3+4+5+6+7+8=35 , 1+2+3+4+5+6+7=28

4+5+6+7+8+9+10=49 , 3+4+5+6+7+8+9=42

نلاحظ أن مجموع سبعة أعداد متتالية هو عدد من مضاعفات العدد .....

7. مجموع ثمانية أعداد متتالية:

1+2+3+4+5+6+7+8=36

2+3+4+5+6+7+8+9=44

3+4+5+6+7+8+9+10=52

نلاحظ أن مجموع ثمانية أعداد متتالية هو عدد من مضاعفات العدد .....

عندما نقسم مجموع ثمانية أعداد متتالية على 8 فإن الباقي هو .....

8. نلخص (عندما يكون عدد الأعداد المتتالية زوجياً)

1. عندما نقسم مجموع عددين متتاليين على 2 يكون الباقي .....
2. عندما نقسم مجموع 4 أعداد متتالية على 4 يكون الباقي .....
3. عندما نقسم مجموع 6 أعداد متتالية على 6 يكون الباقي.....
4. عندما نقسم مجموع 8 أعداد متتالية على 8 يكون الباقي.....

9. نستنتج:

1- عندما نقسم مجموع 10 أعداد متتالية على 10 يكون الباقي .....

2- عندما نقسم مجموع 12 عددا متتاليا على 12 يكون الباقي .....

3- عندما نقسم مجموع 70 عددا متتاليا على 70 يكون الباقي .....

4- عندما نقسم مجموع 82 عددا متتاليا على 82 يكون الباقي .....

5- كم يكون الباقي عندما نقسم مجموع 82 عددا متتالياً على 41؟

6- كم يكون الباقي عندما نقسم مجموع 102 أعداد متتاليةً على 51؟

7- كم يكون الباقي عندما نقسم مجموع 74 عددا متتالياً على 37؟

10. **نلخص (عندما يكون عدد الأعداد المتتالية فرديا)**

1- مجموع 3 أعداد متتالية يقبل القسمة بدون باق على 3

2- مجموع 5 أعداد متتالية يقبل القسمة بدون باق على ....

3- مجموع 7 أعداد متتالية يقبل القسمة بدون باق على ....

11. نستنتج:

1- مجموع 9 أعداد متتالية يقبل القسمة بدون باق على ....

2- مجموع 11 عددا متتاليا يقبل القسمة بدون باق على ....

3- مجموع 13 عددا متتاليا يقبل القسمة بدون باق على ....

4- مجموع 19 عددا متتاليا يقبل القسمة بدون باق على ....

5- مجموع 57 عددا متتاليا يقبل القسمة بدون باق على ....

6- مجموع 19 عددا متتاليا هو عدد من مضاعفات ....

12. **جد ثلاثة أعداد متتالية**، أحدها العدد 18، بحيث يكون مجموعها من مضاعفات العدد 6.

13. **جد ثلاثة أعداد متتالية**، أحدها العدد 42، بحيث يكون مجموعها من مضاعفات العدد 6.

14. **جد خمسة أعداد متتالية**، أحدها 48، بحيث يكون مجموعها من مضاعفات 10.

15. **جد خمسة أعداد متتالية** أحدها العدد 62، بحيث يكون مجموعها من مضاعفات 10.

3. معاملات نقدية

في إحدى دول العالم القطع النقدية من نوعين فقط: قطع 2 ليرة وقطع 3 ليرة. الأوراق النقدية من نوعين فقط، أوراق 200 ليرة، وأوراق 300 ليرة.

إذا أراد شخص أن يشتري غرضا ثمنه 1 ليرة فإنه يعطي البائع قطعة 3 ليرات ويعيد له البائع قطعة 2 ليرة (والغرض طبعاً). إذا اضطر التاجر أن يعيد 1 ليرة لأحد الزبائن فإنه يطلب منه أن يعطيه قطعة 2 ليرة ويقوم التاجر بدوره بإعطاء الزبون قطعة 3 ليرة، وإذا قال له الزبون أنه لا يملك قطعة 2 ليرة، فمن الممكن أن يعطي التاجر غرضا ثمنه 1 ليرة للزبون. جميع المعاملات في هذه الدولة هي بالأعداد الصحيحة من الليرات؟

سؤال 1: لينا إحدى مواطنات تلك الدولة، ذهبت إلى الحانوت ومعها ورقة 200ليرة فقط. اشترت لينا أغراضا ثمنها 163 ليرة. كيف يرجع البائع الباقي؟ كم طريقة توجد؟

سؤال 2: بكم إمكانية يستطيع شخص دفع مبلغ 78 ليرة؟

سؤال 3: بكم إمكانية يستطيع شخص دفع مبلغ 90 ليرة؟

سؤال 4: بكم إمكانية يستطيع شخص أن يدفع مبلغ 170 ليرة؟

سؤال 5: بكم إمكانية يستطيع شخص أن يدفع مبلغ 1500 ليرة باستعمال أوراق نقدية فقط؟

سؤال 6: دفعت أسماء مبلغ 417 ليرة باستعمال ورقة نقدية واحدة و41 قطعة نقدية؟ كيف تم ذلك!

سؤال 7: دفع أشرف مبلغ 1000 ليرة باستعمال ثلاث ورقات نقدية و44 قطعة نقدية، كيف تم ذلك!

سؤال 8: هل يوجد مبلغ لا يمكن دفعه باستعمال القطع أو الأوراق النقدية هذه؟ ابحث.

سؤال 9: توجد طريقة أخرى لإرجاع 1 ليرة. ما هي؟ وتوجد طريقة أخرى لدفع 1 ليرة، ما هي؟

مراجع

5. أبو زينة، فريد كامل، **الرياضيات، مناهجها وأصول تدريسها**، دار الفرقان، عمان، 1982.

6. إبراهيم، مجدي عزيز، **أساليب حديثة في تعليم الرياضيات**، مكتبة الانجلو المصرية، القاهرة، 1997.

7. بوليا، ج.، **البحث عن الحل**، ترجمة: أحمد سليم سعيدان، دار مكتبة الحياة، بيروت، 1965.

8. سلامة، حسن علي، **طرق تدريس الرياضيات**، دار الفجر للنشر والتوزيع، القاهرة، 1995.