جامعة، المجلد 25 العدد 2 (2025): 36-1

ميزات تكامل الجيوجبرا والجداول الإلكترونيّة مع عمليّات النمذجة خلال الانخراط في أنشطة نمذجة

جهينة عواودة-شحبري[1]

Aspects of Integrating GeoGebra and Spreadsheets with Modeling Processes during Engagement in Modeling Activities

Juhaina Awawdeh Shahabari

Abstract

The current research investigates how digital tools integrate with mathematical modeling processes, specifically GeoGebra and spreadsheets. The research sample consisted of 23 prospective mathematics teachers, divided into groups of three to four. These groups engaged in a toothpaste modeling activity; three groups used GeoGebra, and three groups used spreadsheets. Participants' activities were documented through audio and video recordings, enabling the researcher to analyze technology interaction and integration in detail. The data were analyzed in two stages: the first using the constant comparison method to classify modeling processes according to Blum and Leiß's cycle (2005). The second stage involves classifying each digital tool's function using the frameworks developed by Greefrath and Siller (2018) and Villarreal et al. (2018); then, each function was assigned a level based on Shahbari's (2025) methodology.

The results show that using digital tools was prominent in most modeling processes among the GeoGebra groups. Moreover, the groups that used spreadsheets showed three distinct integration patterns: (1) total integration, where digital tools were used fully in most modeling processes; (2) partial integration, where digital tools were used only in some processes; and (3) the use

[1] أكاديمية القاسمي.

of digital tools only after the mathematical model had been created. Additionally, the study reveals that the digital functions used in GeoGebra were more advanced than those used in spreadsheets, highlighting GeoGebra's greater capacity to support complex modeling processes.

Keywords: GeoGebra, spreadsheets, digital tools, modeling processes, mathematics, prospective teachers

الملخّص

يهدف البحث الحالي استكشاف كيفية تكامل الأدوات الرقمية، وبخاصة برمجيات الجيوجبرا والجداول الإلكترونية، مع عمليات النمذجة الرياضية لدى معلمي الرياضيات المستقبليين. تكونت عينة البحث من 23 معلمًا مستقبليًا للرياضيات، تم توزيعهم على مجموعات مكونة من ثلاثة إلى أربعة أفراد. كُلفت هذه المجموعات بتنفيذ نشاط نمذجة متعلق بمعجون الأسنان. تم تقسيم المجموعات إلى قسمين: ثلاث مجموعات استخدمت برنامج الجيوجبرا، وثلاث مجموعات أخرى اعتمدت على الجداول الإلكترونية. تم توثيق أنشطة المشاركين بشكل دقيق من خلال تسجيلات صوتية ومرئية، مما أتاح للباحثة فرصة تحليل التفاعل والتكامل التكنولوجي بعمق. تم تحليل المعطيات على مرحلتين: الأولى، باستخدام طريقة المقارنة المستمرة مع تصنيف مراحل النمذجة وفقًا لدورات بلوم وليس (Blum & Leiß, 2005)، والمرحلة الثانية بتصنيف أنواع وظائف الأدوات الرقمية اعتمادا على أبحاث سابقة لغريفاث وسيلر وفياريال وزملائه (Greefrath & Siller, 2018; Villarreal et al., 2018) ومن ثم مستواها وفقًا لمنهج الباحثة (Shahbari, 2025).

أظهرت النتائج أن استخدام الأدوات الرقمية كان ملحوظًا في معظم مراحل وعمليات النمذجة لدى المجموعات التي استخدمت الجيوجبرا. أما المجموعات التي اعتمدت على الجداول الإلكترونية فقد أظهرت ثلاثة أنماط متميزة للتكامل: النمط الأول هو التكامل الكلي، حيث تم استخدام الأدوات الرقمية بشكل شامل ومتكامل في معظم مراحل النمذجة؛ النمط الثاني هو التكامل الجزئي، حيث تم استخدام الأدوات الرقمية في بعض المراحل فقط؛ والنمط الثالث هو استخدام الأدوات الرقمية بعد إنتاج النموذج الرياضي فقط، مما يعكس اعتمادًا أقل على الأدوات الرقمية في المراحل الأولى من العملية. بالإضافة إلى ذلك، أظهرت الدراسة أن مستوى الدوال الرياضية المستخدمة في الجيوجبرا كان أكثر تعقيدًا مقارنةً بتلك المستخدمة في الجداول الإلكترونية، مما يعكس قدرة الجيوجبرا الأكبر على دعم عمليات النمذجة المعقدة.

كلمات مفتاحية: النمذجة، دائرة النمذجة، الأدوات الرقمية، الجيوجبرا، الجداول الإلكترونية.

المقدّمة

تُعرَّف النمذجة الرياضية بأنها عملية تحويل مشكلة من الحياة الواقعية إلى صيغة رياضية بهدف حلها، ثم إعادة اختبار الحل في سياق الحياة الواقعية (Haines & Crouch, 2007). يركز نهج النمذجة في تعليم الرياضيات على تحويل المواقف الواقعية إلى معادلات رياضية بطريقة ذات معنى للمتعلمين (English & Fox, 2005)، بهدف إعداد الطلاب ليصبحوا مواطنين قادرين على مواجهة تحديات العصر الحديث (Lesh & Doerr, 2003). ففي عصرنا الحالي، يعد تطور فهم الروابط بين الرياضيات والواقع، وكذلك التغيرات داخل مجال الرياضيات نفسه من المتطلبات المهمة (Altay et al., 2014). من ناحية أخرى، أصبح واقعنا اليوم مرتبطًا بشكل كبير بالأدوات الرقمية، التي باتت مدمجة في مختلف جوانب الحياة اليومية، مما فرض متطلبات ومهارات جديدة على سوق العمل بأنواعه المختلفة (Hoyles et al., 2010). لذا، يعد استخدام التكنولوجيا والأدوات الرقمية أمرًا ضروريًا لدراسة وحل المشكلات بشكل عام (Weber & Leikin, 2016)، ولأنشطة النمذجة بشكل خاص (English et al., 2016).

توفر الأدوات الرقمية المختلفة بيئة فعالة عند الانخراط في أنشطة النمذجة. على سبيل المثال، استخدام برنامج الجيوجبرا (Greefrath & Siller, 2018)، والجداول الإلكترونية (Daher & Shahbari, 2015)، والتطبيقات (Buchholtz, 2021)، وبرنامج ماتلاب (Jessen & Kjeldsen, 2023). شدد سيفيكباس وزملاؤه (Cevikbas et al., 2023) في مراجعتهم لـ 38 دراسة على فوائد استخدام التقنيات الرقمية في تعليم النمذجة الرياضية ضمن سياقات عاطفية/نفسية، تربوية، معرفية، واجتماعية. على سبيل المثال، وُجد أن برنامج الجيوجبرا يدعم الطلاب في إنشاء وتطبيق واعتماد نماذج رياضية وعلمية لتفسير وتوقع سلوك مشكلات العالم الواقعي (Villamizar et al., 2020). أما الجداول الإلكترونية فتُستخدم لتحليل المشكلات العلمية المختلفة، وتشجع الطلاب على التفكير ديناميكيًا واعتماد استراتيجيات ديناميكية عند إنتاج الحلول (Arzarello et al., 2012). علاوة على ذلك، تحدد خصائص

الأداة التكنولوجية قرارات الطلاب أثناء العمل الرياضي، مما يؤثر في النهاية على تفسيراتهم للنموذج المستنبط (Ortega et al., 2016). لذا، هناك حاجة إلى استكشاف ما إذا كانت ميزات استخدام التكنولوجيا تختلف وفقاً لنوع الأداة الرقمية، وكيف يؤثر ذلك على العملية. كما تبرز الحاجة إلى إجراء المزيد من الدراسات التي تركز على دمج الأدوات الرقمية، مع التركيز على الفروقات بينها وميزات تكاملها في عملية النمذجة.

يُعتبر نهج النمذجة وتعزيز كفاءات المعلمين في النمذجة مكونًا أساسيًا في تدريب المعلمين (Alwast & Vorhölter, 2022). يحتاج المعلمون المستقبليون إلى فهم النمذجة لدمج أنشطة النمذجة في مدارسهم المستقبلية (Kaiser & Maaß, 2007). يمكن تطوير معرفة الطلاب حول النمذجة من خلال إشراكهم في أنشطة النمذجة كمتعلمين (Kang & Noh, 2012). بناءً على ذلك، أُجريت الدراسة الحالية بين معلمي الرياضيات المستقبليين.

الخلفية النظرية

نهج النمذجة

النمذجة هي عملية "تطوير أوصاف تمثيليّة لأغراض محدّدة في مواقف محددة" (Lesh & Lehrer, 2003, 109). فتُعد النمذجة عملية ترجمة ثنائيّة الاتجاه بين العالم الحقيقي والرياضيات (Blum & Borromeo-Ferri, 2009). يقترح دعاة النهج أنشطة نمذجة التي تتميز بتضمنها مواقف افتراضية في سياقات واقعية حيث تكون المعلومات المقدمة جزئية وغير واضحة ومحددة (Schukajlow et al., 2023). لذا، فإن المشاركة في أنشطة النمذجة تُرشد الطلاب إلى إدراك دور الرياضيات كأداة لتفسير الواقع، وتُعزز فهمهم للمفاهيم الرياضية (Bonotto, 2010). تُعتبر هذه الأنشطة جزءًا أساسيًا في تعليم الرياضيات، حيث تختلف النماذج الرياضية في تركيزها على المنتج النهائي، بينما تركز النمذجة على عملية بناء النموذج الرياضي المناسب (Ang, 2021).

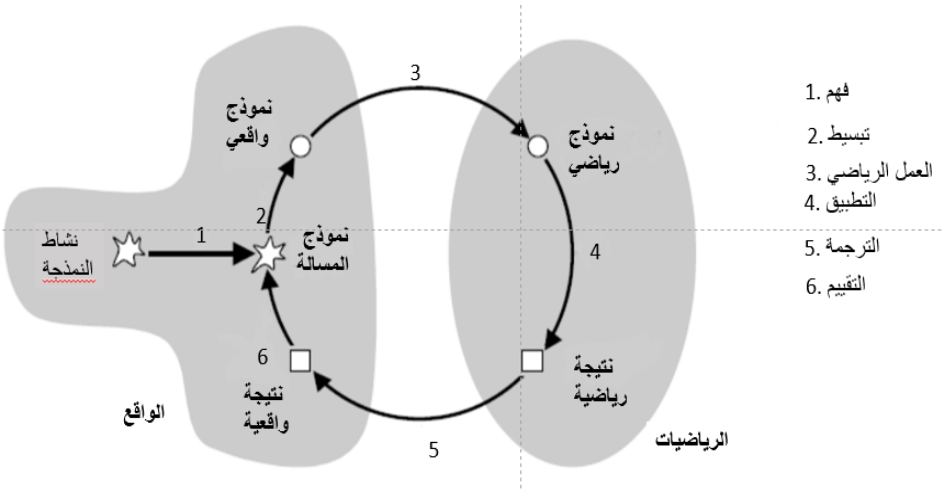
تتطلب أنشطة النمذجة من الطلاب وضع افتراضات حول الحالة المطروحة وتقدير الكميات المرتبطة بها قبل القيام بالعمليات الحسابية. كما تحتاج هذه المشكلات إلى تخمينات للحصول على المعلومات الضرورية. تستند هذه المسائل إلى سيناريوهات من العالم الواقعي وغالبًا ما تفتقر إلى معلومات كافية، مما يستدعي القيام بتوقعات وافتراضات واقعية وحسابات مفصلة، ويشجع الطلاب على استخدام معارفهم وخبراتهم. عادةً ما يتم الانخراط في أنشطة النمذجة ضمن مجموعات صغيرة، حيث يتعاون المشاركون على بناء نموذج رياضي يلبي متطلبات المشكلة (English & Watters, 2005). قد ينتج عن نشاط النمذجة الواحد عدة حلول مختلفة (نماذج رياضية)، لذا فإن النقاش الصفي في نهاية النشاط يعتبر مهمًا جدًا لتحديد أي النماذج كانت أكثر فعالية واستجابة لمتطلبات المسألة. بناءً على ذلك، يمكن القول إن دمج أنشطة النمذجة ومناقشة النماذج الرياضية المختلفة يؤثر بشكل إيجابي على تطوير التفكير الرياضي لدى الطلاب (Yu & Chang, 2009). تختلف أنشطة النمذجة عن المسائل الرياضية المقدمة في الكتب الدراسية، حيث أن الأخيرة قد خضعت بالفعل لعملية الترجمة والتفسير من

قبل من طورها، مما يعني أن الطلاب ليسوا بحاجة إلى تفسير المعلومات المطروحة، بل يُطلب منهم فقط تنفيذ الإجراءات وفق مسار حل محدد (English & Fox, 2005). ومن هنا، يؤكد دعاة هذا النهج على أهمية أنشطة النمذجة في إبراز فائدة الرياضيات في الحياة اليومية (Vorhölter et al., 2014) إلى جانب حاجة الطلاب إلى المعرفة والكفاءات للتعامل مع الأنظمة المعقدة والمواقف في العالم الحقيقي (Sriraman & English, 2010).

دائرة النمذجة

عملية الانخراط في أنشطة النمذجة تتم من خلال دورات متكررة وليست عملية خطية في اتجاه واحد من المعطيات الى النتائج كما هو الامر في حل المسائل المتداولة في الكتب المدرسية التقليدية (Lesh & Doerr, 2003). تعرف هذه العملية بدائرة النمذجة، التي تشمل عمليات ومراحل متعددة (Kaiser, 2020). تقدّم الأدبيات المختلفة عدة طرق لوصف دائرة النمذجة (Borromeo-Ferri, 2006). تعتمد هذه الدراسة على تعريف دائرة النمذجة التي اقترحها بلوم وليس (Blum & Leiß, 2005)، والتي تُعدّ مقبولة على نطاق واسع بين العديد من الباحثين (Kaiser, 2007). تقوم دورة النمذجة هذه بتنظيم عمليات النمذجة إلى مراحل وعمليات محددة. وفقًا لبلوم وليس (Blum & Leiß, 2005)، تتضمّن العمليات الست التالية: 1. فهم الموقف وتبسيطه: تبدأ العملية بفهم المشكلة في سياقها الواقعي وتبسيطها، بهدف تحديد العناصر الأساسية التي يجب التعامل معها. 2. تقديم نموذج واقعي: يتم تحويل المشكلة إلى نموذج واقعي يعكس الفهم المبسط، وغالبًا ما يكون من الصعب التمييز بين النموذج الواقعي ونموذج المسألة. 3. العمل رياضيًا لبناء نموذج رياضي: يتم استخدام الرياضيات لتطوير نموذج رياضي من النموذج الواقعي. هذا النموذج قد يكون معادلة، جدول، أو تمثيل آخر. 4. إنتاج نتائج رياضية من تطبيق النموذج الرياضي: تتضمّن هذه العملية حساب النتائج باستخدام النموذج الرياضي المطور. 5. إعطاء تفسير واقعي للنتائج الرياضية: يتم تفسير النتائج الرياضية وتحويلها إلى نتائج واقعية لها معنى في السياق الواقعي. 6. التحقق من النتائج الواقعية حسب الحالة الأصلية: تتضمن هذه الخطوة التأكد من أن النتائج الواقعية تتناسب مع الوضع الأصلي

وتحقق الأهداف المطلوبة. تؤدي هذه العمليات إلى تكوين المراحل الخمسة في دورة النمذجة، وهي: 1. مرحلة نموذج المسألة: تمثيل عقلي أو خارجي للمسألة. 2. مرحلة النموذج الواقعي: تمثيل خارجي يستخدم لفهم الموقف. 3. مرحلة النموذج الرياضي: تمثيل رياضي مثل المعادلات أو الحسابات التي لا ترتبط مباشرة بالواقع. 4. مرحلة النتيجة الرياضية: النتائج الرياضية التي يتم الحصول عليها من تطبيق النموذج الرياضي. 5. مرحلة النتيجة الواقعية: النتائج الواقعية التي يتم الحصول عليها من تفسير النتائج الرياضية في سياق واقعي. تقدّم هذه الدورة المفصلة للنمذجة، التي تتضمن المراحل الخمسة والعمليات الست، إطارًا شاملاً لفهم وتطبيق عمليات النمذجة الرياضية في سياقات تعليمية وبحثية.



شكل 1. دائرة النمذجة لبلوم وليس (Blum & Leiß, 2005)

لإكمال عملية النمذجة بنجاح، يحتاج المشتركون إلى كفاءات رياضية وتواصلية (English & Fox, 2005; Stillman, et al., 2007)، والتي يشار إليها باسم كفاءات النمذجة. اقترح ماس (Maaß, 2006) وستيلمان وآخرون (Stillman et al., 2007) قائمة بكفاءات النمذجة المطلوبة للانتقال بين مراحل النمذجة، ومنها: القدرة على توضيح سياق المشكلة، معرفة المتغيرات ذات الصلة، تمثيل العناصر الرياضية، اختيار المفاهيم الرياضية المناسبة، تحديد النتائج الرياضية في العالم الحقيقي، والتحقق من القرارات والنتائج.

الانخراط في أنشطة النمذجة باستخدام الأدوات الرقمية

تلعب التكنولوجيا دورًا محوريًا في عمليات النمذجة، حيث تعزز التعلم والتفاعل بين المتعلمين وممكن أن تكون فعّالة على مستوى البرمجيات، مثل استخدام الخصائص الديناميكية في الجيوجبرا أو برامج التصميم مثل سكراتش، وكذلك على مستوى تمثيل البيانات باستخدام ميزات مثل تلك المتوفرة في الجداول الالكترونية (Cevikbas et al., 2023).

أظهرت الدراسات أن استخدام أدوات التكنولوجيا المختلفة يمكن أن يسهم بشكل كبير في تحسين التعلم. على سبيل المثال، وُجد أن الطلاب يشعرون بالدعم عند استخدام الجيوجبرا في أنشطة حل المشكلات (Budinski & Takači, 2011). كما تُسهم الجداول الالكترونية في تحليل جوانب متعددة من المشكلات العلمية بفضل التمثيلات المتعددة مثل الأرقام والرسوم البيانية والصيغ (Villarreal et al., 2018). بالإضافة إلى ذلك، تشجع الجداول الالكترونية الطلاب على التفكير الديناميكي وتبني استراتيجيات ديناميكية في تقديم الحلول (Arzarello et al., 2012).

تناولت الأدبيات البحثية اراء مختلفة حول دمج الأدوات الرقمية في أنشطة النمذجة. الرأي الأول يرى أن التكنولوجيا تشارك بعد بناء النموذج الرياضي، حيث تُترجم إلى نموذج تكنولوجي (Siller & Greefrath, 2010)، بينما يعرض الرأي الثاني أن التكنولوجيا تشارك في جميع مراحل عملية النمذجة (Geiger, 2011). بينما تم الجمع بين هذين الرأيين في دراسة لظاهر وشحبري (Daher & Shahbari, 2015)، حيث حددت ثلاث دوائر نمذجة تظهر ميزات مختلفة لتكامل الأدوات الرقمية في عمليات النمذجة. أما البحث الأخير للباحثة (Shahbari, 2025) فقد أظهر أن استخدام الأدوات الرقمية ليس ثابتًا، بل هو مرتبط بالتجربة المستمرة لانخراط المشاركين في أنشطة النمذجة باستخدام هذه الأدوات. حيث أظهرت النتائج أن أنماط تكامل الأدوات الرقمية اختلفت في النشاط الأول، لكن في النشاط الأخير تطورت المجموعات إلى نمط واحد من تكامل الأدوات الرقمية، مما يؤكد تكاملها مع جميع عمليات ومراحل النمذجة.

النمذجة في تعليم المعلمين

يفترض نهج النمذجة أن خبرة معلمي الرياضيات في التدريس يجب أن تنعكس في ما يمكن للمعلمين "فعله" وما "يرونه" في مواقف التدريس والتعلم وحل المشكلات (Lesh & Lehrer, 2003 p. 111)، وذلك لضمان أن تكون تدخلاتهم أثناء مشاركة طلابهم في أنشطة النمذجة فعالة (Blum & Leiß, 2005). يلعب المعلمون دورًا حاسمًا في تحديد كيفية تعلم الطلاب لأنشطة النمذجة الرياضية (Cai et al., 2014). لذلك، وكما تناولت العديد من الدراسات، يُعتبر تأهيل المعلمين المستقبليين في مجال النمذجة قضية جوهرية (على سبيل المثال، Borromeo Ferri & Blum, 2009; Cai et al., 2022; Cetinkaya et al., 2016). يمكن تطوير معرفة المعلمين المستقبليين بالنمذجة من خلال مشاركتهم في أنشطة النمذجة كمتعلمين (Kang & Noh, 2012). أشارت العديد من الدراسات إلى التأثيرات الإيجابية لمشاركة المعلمين المستقبليين في أنشطة النمذجة، وتشمل هذه التأثيرات توفير الفرصة للمعلمين لرؤية الروابط بين الرياضيات والعالم الواقعي (Altay et al., 2014) والطرق المختلفة لحل المشكلات (Yu & Chang, 2009)، وتطوير فهمهم لطبيعة النمذجة ومهامها (Cetinkaya et al., 2016)، وتعزيز معرفتهم بالمحتوى التربوي المتعلق بالنمذجة الرياضية مثل معرفة مهام النمذجة وعملياتها وتدخلاتها (Greefrath et al., 2022)، تطوير كفاءاتهم في النمذجة (Shahbari & Peled, 2017)، التأثير على كفاءتهم الذاتية في النمذجة (Maaß & Gurlitt, 2011)، وكذلك تعزيز قدرتهم على بناء أنشطة النمذجة مع مراعاة مبادئ مختلفة (Bukova-Güzel, 2011). كما تساهم هذه الأنشطة في تطوير معرفتهم الرقمية ودمجها في حل مسائل حياتية (Shahbari, 2025). رغم فعالية مشاركة المعلمين المستقبليين في أنشطة النمذجة والأبحاث التي تناولت ذلك، لا يزال هناك حاجة لفهم أعمق لخصائص الأدوات الرقمية خلال تعامل المعلمين المستقبليين مع أنشطة النمذجة. يعد أحد العوائق أمام التطبيق الفعال لأنشطة النمذجة في الفصل الدراسي هو الطبيعة المحدودة للمعرفة التربوية والموضوعية للمعلمين حول النمذجة (Kuntze et al., 2013).

هدف البحث واسئلته

تبحث هذه الدراسة خصائص الأدوات الرقمية التي يستخدمها معلمو الرياضيات المستقبليين خلال عمليات النمذجة. وتهدف إلى تحديد ميزات هذه الأدوات الرقمية عبر مختلف مراحل/أفعال عملية النمذجة وملاحظة كيف تختلف هذه الميزات مع مشاركة المشاركين في نشاط النمذجة "معجون الاسنان" باستخدام الجيوجبرا وباستخدام الجداول الالكترونية. وأسئلة البحث الرئيسية هي:

1. متى تُستخدم الأدوات الرقمية خلال عمليات النمذجة (إذا تم استخدامها)؟ وهل يتغير استخدام هذه الأدوات الرقمية بين الجيوجبرا والجداول الالكترونية؟
2. ما هي أنواع وظائف الأدوات الرقمية المستخدمة خلال عمليات النمذجة وهل يوجد فرق بين مستوى وظائف الأدوات الرقمية المستخدمة في مرحلة/عملية معينة بين الجيوجبرا والجداول الالكترونية؟

المنهجية

نوع البحث

تم استخدام منهجية البحث النوعي من خلال إجراء تحليل معمق للمشاهدات التي رصدت انخراط المعلمين المستقبليين في نشاط نمذجة باستخدام الجيوجبرا والجداول الإلكترونية. يسمح البحث النوعي بتحليل دقيق لميزات تكامل الجيوجبرا والجداول الإلكترونية في مختلف مراحل وعمليات النمذجة.

عينة البحث

شملت الدراسة 23 معلمًا مستقبليًا في السنة الثانية من دراساتهم الاكاديمية في تعليم الرياضيات بإحدى كليات إعداد المعلمين في المجتمع العربي الفلسطيني في إسرائيل. تم اختيار المشاركين بناءً على التوفر وسهولة الوصول، وليس عبر عملية عشوائية أو منهجية (أي باستخدام طريقة العينة المتاحة). كان لدى المشتركين تجربة ومعرفة بكلتا الاداتين، الجيوجبرا والجداول الالكترونية. لكن لم تكن لديهم تجربة سابقة في أنشطة النمذجة أو الانخراط في نشاط نمذجة.

سيرورة البحث

تم تقسيم المشاركين إلى ست مجموعات، تكونت خمسة منها من أربعة أفراد لكل مجموعة، ومجموعة واحدة من ثلاثة أفراد. ثلاث مجموعات انخرطت في نشاط معجون الأسنان باستخدام الجيوجبرا، بينما انخرطت ثلاث مجموعات أخرى في نفس النشاط باستخدام الجداول الإلكترونية. تم تقسيم الأفراد داخل كل مجموعة واختيار الأداة الرقمية بشكل عشوائي.

تم عرض النشاط على المشاركين من خلال ملف أُرسل إلى حواسيبهم. لم يُحدد وقت معين لإنهاء النشاط، لكن الوقت الذي استغرقته المجموعات كان يتراوح بين 70 و85 دقيقة تقريبًا. كانت الباحثة مرشدة للمشاركين خلال انخراطهم في النشاط، حيث قدمت إرشادات عامة دون

التدخل في اتخاذ القرارات المتعلقة بإيجاد حلول للمسألة المتضمنة في نشاط معجون الأسنان، والذي سيتم تفصيله لاحقًا في الفصل الحالي.

مصادر المعطيات

تم جمع البيانات من خلال تسجيلات الفيديو للمجموعات الست التي شاركت في نشاط النمذجة معجون الاسنان. بعد ذلك، تم نسخ تسجيلات الفيديو تحت إشراف الباحثة وتفريغها حرفيًا، حيث تضمنت النسخ جميع التعليقات اللفظية والإجراءات التي قام بها المشاركون أثناء تفاعلهم مع الجيوجبرا والجداول الإلكترونية.

تحليل المعطيات

تم إجراء تحليل المعطيات على مرحلتين. في المرحلة الأولى، تم باستخدام طريقة المقارنة المستمرة (Glaser & Strauss, 1967). مع الاخذ بعين الاعتبار تصنيف مراحل/ عمليات النمذجة وفقًا لنهج دورات النمذجة لبلوم وليس (Blum & Leiß, 2005) التي تم تفصيلها في الخلفية النظرية. اما المرحلة الثانية فقد تناولت تحديد نوع وظائف الأدوات الرقمية المستخدمة في حل نشاط النمذجة اعتمادا على أبحاث سابقة لغريفاث وسيلر وفياريال وزملائه (Greefrath & Siller, 2018; Villarreal et al., 2018) ومن ثم تصنيف مستوى وظائف هذه الأدوات الرقمية اعتمادا على طريقة التحليل التي اقترحتها الباحثة (Shahbari, 2025) والتي تشمل أربع درجات من صفر إلى ثلاثة. يحصل المستوى الثالث على ثلاث نقاط، مما يدل على مستوى عالٍ من تكامل الأدوات الرقمية واستخدام ميزات ديناميكية للادوات الرقمية. يحصل المستوى الثاني على نقطتين، مما يدل على مستوى متوسط من تكامل الأدوات الرقمية، دون استخدام الخصائص والميزات الأساسية اللازمة لحل المشكلة. يحصل المستوى الأول على نقطة واحدة، مما يدل على مستوى أساسي جدًا من تكامل الأدوات الرقمية. يحصل المستوى صفر على صفر نقطة، مما يدل على عدم استخدام للأدوات الرقمية وتكاملها.

نشاط النمذجة "معجون الاسنان"

صمم النشاط شحبري وطبّاخ (Shahbari& Tabach, 2016)، واعتمد على اسطورة متناقلة ونصّه كالتالي: "يُحكى أنّ طالبًا جامعيًّا ذهب إلى الرئيس التنفيذيّ لشركة كولجيت، واقترح فكرة من شأنها زيادة أرباح الشركة دون أيّ جهد. قال الطالب: "تُسعدني مشاركتك فكرتي، ولكن إذا قرّرت استخدام الفكرة، عليك أن تدفع لي مليون دولار". بعد قبول الرئيس التنفيذيّ للشروط، أظهر له الطالب الشاب عبوة لمعجون الأسنان واقترح توسيع فتحة العبوة".

تعليمات للطالب: قم بتكبير فتحة عبوة معجون الأسنان التي تستعملها. اكتب خطابًا لجمعيّة حماية المستهلك يصف كيف تغيّر استهلاك معجون الأسنان بعد تكبير فتحة العبوة، وبيّن ذلك بصورة رياضيّة مقنعة.

النتائج

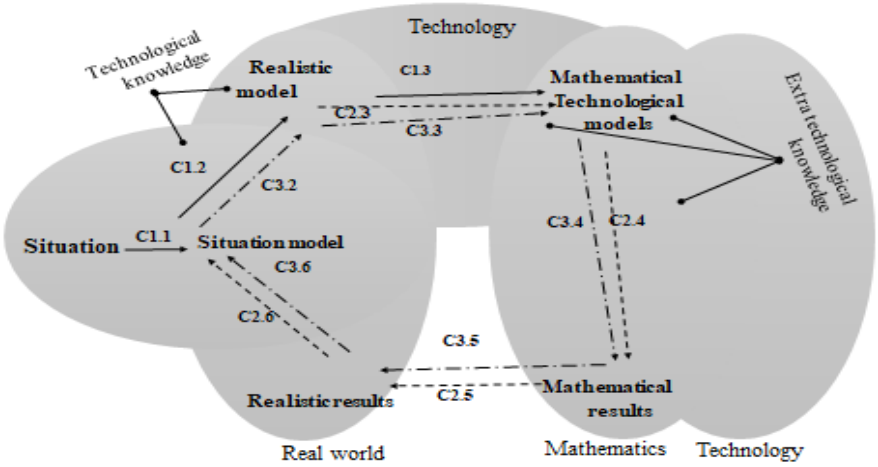
يحتوي هذا الفصل على عرض لأنواع دوائر النمذجة وتكامل الأدوات الرقمية التي ظهرت بين المجموعات الست خلال انخراطها في نشاط معجون الأسنان. سيتم التوسع في استخدام الأدوات الرقمية في مراحل وعمليات النمذجة، مع التركيز على الفروقات بين استخدام الأداة الرقمية جيوجبرا والجداول الإلكترونية. كما سيتم عرض درجة ومستوى الوظائف المستخدمة في كل من مراحل النمذجة المختلفة.

تكامل الأدوات الرقمية (الجيوجبرا والجداول الكترونية) في دو ائر النمذجة

يشير تحليل المعطيات الى ان تكامل الأدوات الرقمية ظهر في ثلاث حالات مختلفة في دوائر النمذجة بين المجموعات الست. الحالة الأولى تتضمن تكامل الأدوات الرقمية يبدأ من مرحلة التبسيط، النموذج الواقعي، العمل الرياضي، النموذج الرياضي-التكنولوجي ثم التطبيق في النموذج الرياضي (انظر شكل 2). اما الحالة الثانية شملت العمل الرياضي، النموذج الرياضي التكنولوجي ثم التطبيق فيه (انظر شكل 3). اما الحالة الأخيرة، فقد اقتصر تكامل الأدوات الرقمية فقط على الترجمة من النموذج الرياضي الى النموذج التكنولوجي، أي انه تم انشاء نموذج رياضي ثم تم تحويله الى نموذج تكنولوجي (انظر شكل 3).

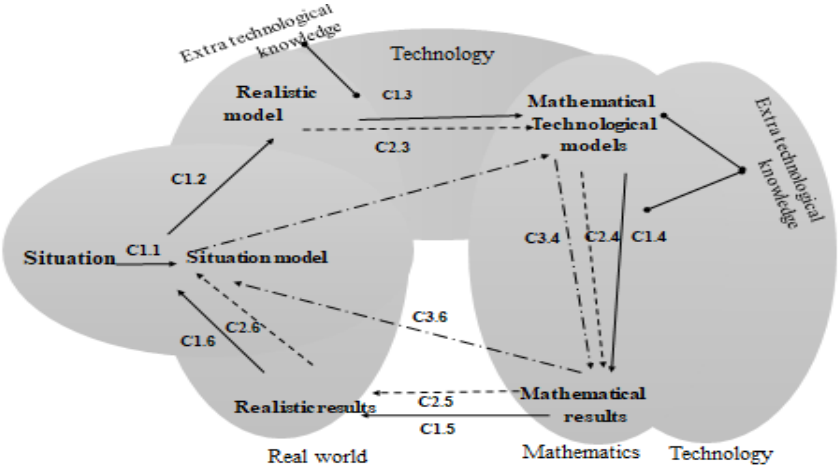
في الاشكال (1، 2 و3) يشير الحرف C إلى الدورة، حيث يشير C1 إلى الدورة الأولى، وC2 إلى الدورة الثانية، وهكذا. تشير الأرقام بعد النقطة إلى العمليات: 1=الفهم؛ 2=التبسيط؛ 3= العمل الرياضي؛ 4=التطبيق؛ 5=تفسير النتائج الرياضية؛ 6=التحقق من الصحة. تشير الأرقام والحروف معًا إلى التحول في كل دورة. على سبيل المثال، يشير C2.4 إلى الدورة الثانية في التحول التطبيق في النموذج الرياضي.

شكل 2. دائرة ومسارات النمذجة لإحدى المجموعات باستخدام الجيوجبرا



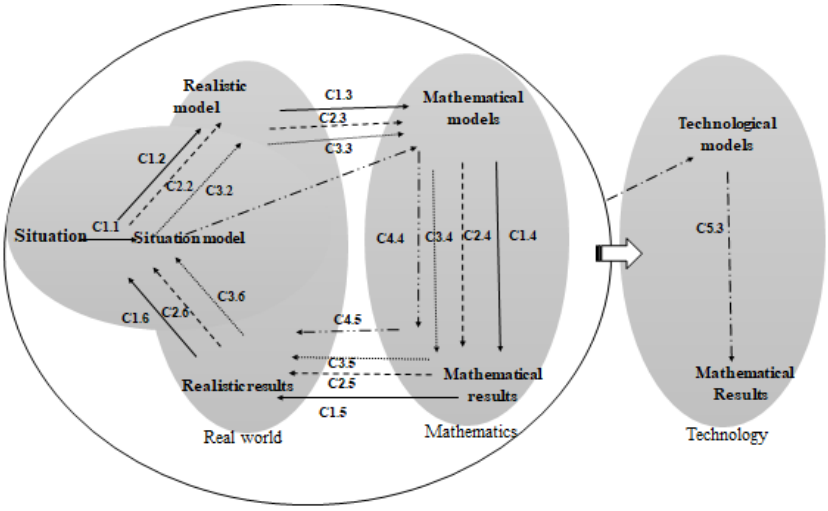
يشير شكل 2 إلى أنه خلال انخراط المشاركين في نشاط النمذجة باستخدام معجون الأسنان، مرّ المشاركون بثلاثة مسارات من دوائر النمذجة، حيث تم تحديد كل مسار بنوع سهم مختلف. كان المسار الأول جزئيًا، بينما أكملت المسارات الأخرى دائرة النمذجة بالكامل. كما تم استخدام الأداة الرقمية في مراحل النمذجة الأولى خلال عملية التفسير والنموذج الواقعي.

شكل 3: دائرة ومسار النمذجة لإحدى المجموعات باستخدام الجداول الالكترونية



يشير شكل 3 إلى أن دائرة النمذجة احتوت أيضًا على ثلاثة مسارات، حيث اقتصر دمج الأدوات الرقمية على مرحلة العمل الرياضي، وإيجاد النموذج الرياضي، والتطبيق فيه بعد ذلك.

شكل 4: دائرة ومسارات النمذجة لإحدى المجموعات باستخدام الجداول الالكترونية



يشير شكل 4 إلى أنه تم ترجمة النموذج الرياضي إلى نموذج تكنولوجي. تدل مسارات النمذجة على أنه تم أولاً إيجاد النموذج الرياضي وتقييمه من خلال تطبيق قيم مختلفة، ثم التوصل إلى نتائج رياضية وترجمتها إلى نتائج واقعية وقبولها بعد تقييم ارتباطها بالموقف. بعد ذلك، تمت ترجمة النموذج الرياضي إلى نموذج تكنولوجي باستخدام الجداول الإلكترونية.

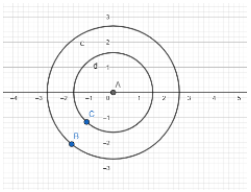
تشير بيانات المجموعات الست إلى أن تكامل الأدوات الرقمية كان أكثر وضوحًا عند استخدام الجيوجبرا، حيث استخدمت المجموعات الثلاث الجيوجبرا في غالبية مراحل النمذجة، وكان مسار تكامل التكنولوجيا مشابهًا لدائرة النمذجة في شكل 2. بالمقابل، كان استخدام الجداول الإلكترونية لنفس النشاط مختلفًا بين المجموعات الثلاث. في مجموعة واحدة فقط، كان تكامل التكنولوجيا مشابهًا للمجموعات التي استخدمت الجيوجبرا. أما مجموعة أخرى، فقد أظهرت تكاملًا جزئيًا مماثلاً لما هو موضح في شكل 3، بينما كانت المجموعة الثالثة قد فصلت العمل التكنولوجي عن دائرة النمذجة كما هو مبين في شكل 4.

مراحل وعمليات النمذجة خلال الانخراط في أنشطة نمذجة باستخدام الجيوجبرا والجداول الالكترونية

تشير نتائج المجموعات الست الى ان دمج الأدوات الرقمية في عمليات ومراحل النمذجة تفاوت بين الأداة الرقمية الجيوجبرا والجداول الالكترونية. فيما يلي تفاصيل لكل واحدة من مراحل وعمليات النمذجة.

عملية التبسيط ومرحلة النموذج الو اقعي

تم استخدام الأدوات الرقمية في عملية تبسيط نشاط معجون الاسنان لدى المجموعات الثلاث التي استخدمت الجيوجبرا، بينما تم استخدامها في مجموعة واحدة من بين المجموعات التي استخدمت الجداول الالكترونية. يظهر مقطع 1 كيف تم استخدام الجيوجبرا في عملية التبسيط في احدى المجموعات، بينما يظهر مقطع 2 إحدى المجموعات المستخدمة للجداول الالكترونية.



شكل 5: عملية تبسيط

مقطع 1: عملية تبسيط باستخدام الجيوجبرا

[23] رانية: ممكن رسم دوائر باستخدام الجيوجبرا (ترسم دائرتين) ممكن واحدة داخل الأخرى (انظر شكل 5)

[25] سحر: لما الفتحة تزيد نصف القطر بكبر

يظهر المقطع أن الطالبة رانية حاولت تمثيل فتحة المعجون الاصلية والفتحة المكبرة من خلال رسم دائرتين تحوي أحداهما الأخرى (انظر شكل 5). واستمرت الطالبتان في عملية التبسيط والوصول إلى النموذج الواقعي عبر تشبيه الفتحة بالدائرة وزيادة الفتحة بتكبير نصف القطر.

مقطع 2: عملية تبسيط باستخدام الجداول الالكترونية

[18] سمر: يعني ممكن نكتب الخلية الأولى عن الفتحة الاصلية وجنبها بعد ما توسعت الفتحة

[20] ولاء: نعم ممكن نصف القطر الأصلي وهنا بعد ما تكبر

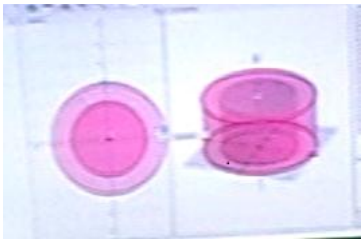
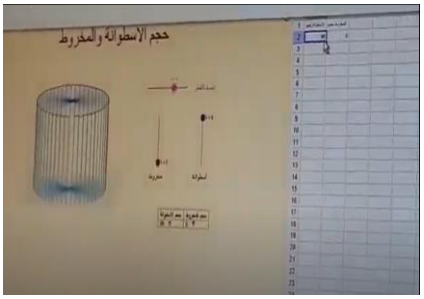
[21] حنين: نعمل كل عامود عن وضعية ونضيف قيم كل مرة

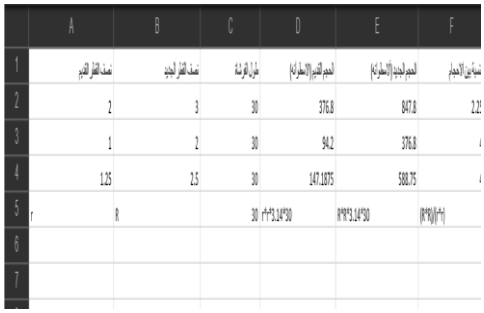
يُظهر المقطع أن الطالبات قمن بتفسير نشاط معجون الأسنان، وبالتزامن مع ذلك، سجلن داخل خلايا في صفحة الإكسل. أي أن عملية التبسيط رافقها تمثيل كلامي للمتغيرات في النشاط، وتمييز المتغيرات الرئيسية مثل فتحة أنبوبة معجون الأسنان وعلاقة الفتحة بنصف القطر.

عملية العمل الرياضي النموذج الرياضي- التكنولوجي

يظهر تحليل المعطيات انه تم استعمال الجيوجبرا والجداول الالكترونية في العمل الرياضي وإيجاد النموذج الرياضي في النشاطين لدى المجموعات الثلاث التي استخدمت الجيوجبرا وفي مجموعتين التي استخدمت الجداول الالكترونية. في الجيوجبرا اعتمد العمل الرياضي والنماذج الرياضية التكنولوجية على انشاء مزلاق يمكن من خلاله التعبير عن قيم مختلفة لنصف قطر العبوة الاصلية كذلك مقدار التكبير، انشاء اسطوانتين لتمثيل حجم كمية معجون الاسنان الاصلية وللكمية بعد تكبير الفتحة. النماذج الرياضية كانت اما أسطوانات متداخلة او أسطوانات محاذية. أيضا ظهر نموذج المخروط الذي اعتمدته احدى المجموعات لتمثيل شكل معجون الاسنان الخارج من العبوة. تم استخدام الجداول كإمكانيه للتمثيل بجانب التمثيل التصويري. اما بالنسبة للمجموعتين اللتين استخدمتا الجداول الالكترونية اعتمد العمل الرياضي والنماذج الناتجة على انشاء دوال مثل حجم الاسطوانة $\pi r^2 h$ وكذلك استخدام الميزات الديناميكية للخلايا وبناء معادلات كقسمة خلية من أخرى. يعرض جدول 1 امثلة لنماذج عملية العمل الرياضي والنموذج الرياضي التكنولوجي في الاداتين.

جدول 1. نماذج من العمل الرياضي والنماذج الرياضية الرقمية

نماذج من عمل المشتركين	تفسير الشكل
 شكل 6: بداية العمل على نموذج رياضي تكنولوجي لإحدى المجموعات التي استخدمت الجوجبرا.	يظهر شكل 6 بدء عملية إنشاء أسطوانتين، واحدة داخل الأخرى، وعرضهما في رسم ثلاثي الأبعاد. يُعتبر هذا التمثيل أحد المميزات البارزة لاستخدام الجيوجبرا في النشاط.
 شكل 7: العمل على نموذج رياضي تكنولوجي لاحدى المجموعات المستخدمة للجيوجبرا	يظهر شكل 7 نموذج رياضي تكنولوجي في طور البناء، تم تمثيل الكمية الخارجة من عبوة معجون الاسنان بطريقتين، اما كمخروط او كأسطوانة. تم العمل على انشاء مزلاق لتمثيل قيم نصف القطر، مزلاق لارتفاع المخروط واخر للأسطوانة. بجانب ذلك في يمين الشكل، تم انشاء جدول لاحتساب كل من حجم المخروط وحجم الأسطوانة.



	A	B	C	D	E	F
1	نصف القطر القديم	نصف القطر الجديد	طول الفرشاة	الحجم القديم (الأسطوانة)	الحجم الجديد (الأسطوانة)	نسبة بين الحجم
2	2	3	30	376.8	847.8	2.25
3	1	2	30	94.2	376.8	4
4	1.25	2.5	30	147.1875	588.75	4
5	R		30	=PI()*D5^2*30	=PI()*B5^2*30	=E5/D5
6						
7						

شكل 8: العمل على نموذج رياضي تكنولوجي لاحدى المجموعات المستخدمة للجداول الالكترونية

يعرض شكل 8 نافذة جدول البيانات. أدخل المشاركون أنصاف الأقطار الأصلية في العمود A، والأقطار الجديدة في العمود B، وطول فرشاة الأسنان في العمود C، وأحجام معجون الأسنان وفقًا لأنصاف الأقطار الأصلية (باستخدام حجم الأسطوانة) في العمود D، وأحجام معجون الأسنان وفقًا للأقطار الأصلية (باستخدام حجم الأسطوانة) في العمود D، وأحجام معجون الأسنان حسب نصف القطر الأصلي (باستخدام حجم الأسطوانة) في العمود E، والنسبة بين حجم الأسطوانات القديم والجديد في العمود F.

عملية التطبيق في النموذج الرياضي

قام المشاركون بتطبيق النموذج الرياضي-التكنولوجي في جميع المجموعات. كانت عملية التطبيق متعلقة بمميزات النموذج. في مجموعات الجيوجبرا التي أنشأت مزلاقًا، كان التطبيق يتم من خلال تحريك الشريط للحصول على قيمة محددة. بالإضافة إلى ذلك، اعتمدت عملية التطبيق على إدخال القيم في خلايا الجداول في حالة استخدام الجداول الإلكترونية، كما يظهر في مقطع 3. وقد تكررت نفس العملية أيضًا في المجموعات الثلاث التي استخدمت الجداول الإلكترونية، كما يظهر في مقطع 4.

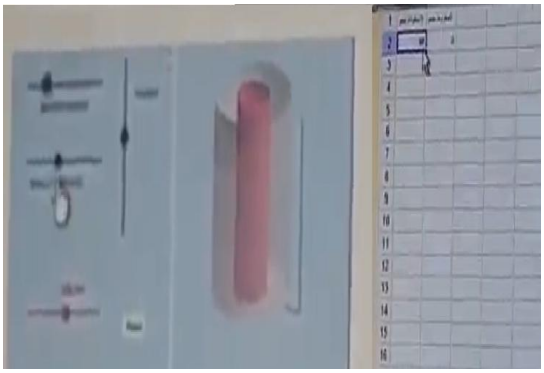
مقطع 3: تطبيق في النموذج الرياضي التكنولوجي في الجيوجبرا

[262] سماح: نفحص عندما القطر 1.5. [تحرك الشريط للحصول على القيمة 1.5] (انظر شكل 9)

[263] غالية: 14 الناتج. صحيح، 1.5 تربيع ضرب باي (النسبة التقريبية) ضرب 2 (طول الفرشاة) 14[حجم الأسطوانة]

[282] غالية: وإذا نصف القطر بكبر نأخذ مثلا 2.

[289] رنا: يصبح الحجم 25



شكل 9: نموذج رياضي تكنولوجي لإحدى المجموعات التي استخدمت الجيوجبرا

على يسار شكل 9، يظهر شريط لنصف القطر الأصلي، وشريط لنصف القطر الموسع، وشريط لارتفاع الأسطوانة. في الوسط، توجد صورة توضح الأسطوانتين الممثلة في النموذج. على الجانب الأيمن من نافذة جدول البيانات، تمثل الخلايا الكميات ذات الصلة بالأسطوانات، حيث تم حساب الأحجام في هذه الخلايا باستخدام المعادلة $\pi r^2 h$ التي قام المشاركون ببنائها بأنفسهم. من خلال تحريك الأشرطة، قام المشاركون بتطبيق النموذج الرياضي التكنولوجي للحصول على القيم المحددة.

مقطع 4: تطبيق في النموذج الرياضي التكنولوجي في الجداول الالكترونية

[320] ربى: نحدد امرين في الجدول، نصف القطر بالاول ومقدار التكبير

[322] الاء: نبدأ 2.3 وكل مرة منكبر بواحد

[324] مرح: واحد كثير بكبر غير منطقي

[325] الاء: ممكن كل مرة نكبر ب 0.01 (تضيف قيمة التكبير) النسبة تصبح تقريبا مرة ونص (نسبة كمية معجون الاسنان الجديدة من الكمية الاصلية قبل التكبير)

يعرض مقطع 4 كيفية تطبيق قيم نصف القطر الأصلي ومقدار التكبير في النموذج الرياضي التكنولوجي. يظهر أيضًا أن عملية اختيار القيم للتعويض في النموذج لم تكن عشوائية، بل كانت ملائمة لمتطلبات المسألة. يوضح شكل 10 النموذج الرياضي التكنولوجي الذي أنتجته إحدى المجموعات ويعملون على تطبيقه. يتضمن النموذج تمثيل الكميات ذات الصلة وإدخال القيم المناسبة للتطبيق وفقًا لمتطلبات المسألة.

	ارتفاع الاسطوانه	الاسطوانه الأولى		الاسطوانه الثانيه		
		نصف القطر	الحجم	الاضافه	نصف القطر	الحجم
1	2	1.5	14.13	0.2	1.7	18.1492
2	2	1.6	16.0768	0.22	1.82	20.801872
3	2	1.7	18.1492	0.24	1.94	23.635408
4	2	1.8	20.3472	0.26	2.06	26.649808
5	2	1.9	22.6708	0.28	2.18	29.845072

			النسبة بينهما
	r	r+x	
1	1.5	1.7	1.2844444
2	1.6	1.82	1.2939063
3	1.7	1.94	1.3022837
4	1.8	2.06	1.3097531
5	1.9	2.18	1.3164543

شكل 10: عملية تطبيق في نموذج رياضي تكنولوجي لإحدى المجموعات التي استخدمت الجداول الالكترونية

يشير شكل 10 الى استخدام الجداول الإلكترونيّة لحلّ المشكلة عن طريق تمثيل الكميّة الخارجة من فتحة عبوة معجون الأسنان على شكل أسطوانة. تم ترتيب الخلايا لعرض أبعاد الأسطوانة قبل وبعد التكبير، مع حساب مقدار التكبير. تم بناء معادلات لحساب أحجام الأسطوانات الأصلية والمكبّرة، وإيجاد النسبة بين الحجوم. يظهر الحل التفصيلي في الأعمدة

من Q إلى K، بينما الحل المختصر في الأعمدة من I إلى F، مع إمكانية حساب التكلفة بناءً على سعر حجم سم^3 من معجون الأسنان

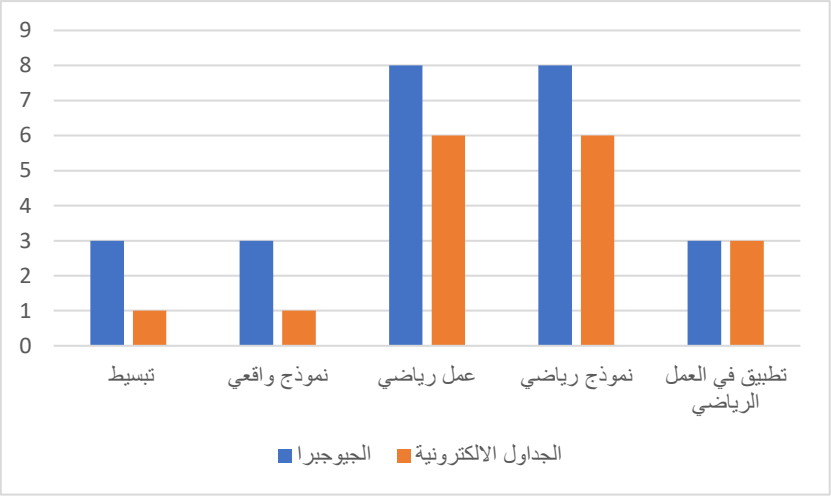
مستوى الدوال المستعملة في الأدوات الرقمية

تظهر تحليل المعطيات ان الدوال التي ظهرت باستخدام الجوجبرا كانت: أ) الرسم الرياضي: وهي تتضمن رسم أشكال هندسية بسيطة ضمن نظام إحداثيات. ب) الإنشاء: وهي تتعلق برسم أشكال وتكوينات هندسية أكثر تعقيدًا، بمساعدة خطوات وسيطة. ج) القياس: وتتمثل بتحديد المسافة بين النقاط، طول أجزاء الخطوط، ومنحدرات الخطوط أو الأجزاء. د) التجريب: وهي تتضمن تغيير المعلمات أو الشروط أو الافتراضات في الرسم وملاحظة التأثيرات. هـ) الحساب: وتتعلق بإجراء العمليات الحسابية باستخدام البرامج.

اما الدوال التي ظهرت باستخدام الجداول الالكترونية فهي: أ) عرض البيانات باستخدام الجداول أو أنواع مختلفة من التمثيلات الرسومية للتواصل بشأن النتائج من عملية النمذجة. ب) إجراء حسابات بسيطة باستخدام الإمكانيات التلقائية للجدول الالكتروني. ج) برمجة وظائف مخصصة باستخدام الوظائف الأصلية من الجداول الالكترونية لإجراء الحسابات بطريقة أكثر كفاءة. د) تشغيل عمليات المحاكاة أو تطبيق النموذج الذي تم إنشاؤه.

تحليل المعطيات يشير إلى أن استخدام الأدوات الرقمية في عمليات النمذجة أظهر تفاوتًا كبيرًا في مستوى تعقيد الدوال التكنولوجية بين الجيوجبرا والجداول الإلكترونية. كما يلي: أظهرت مجموعات الجيوجبرا مستوى عالٍ من تعقيد الدوال التكنولوجية، حيث حصلت على درجة ثمانية من تسعة في تقييم دوال العمل والنموذج الرياضي. هذا يعكس استخدامًا متقدمًا للميزات والوظائف الديناميكية في الجيوجبرا، مثل الرسم الهندسي المعقد، وتغيير المعلمات، وإجراء عمليات حسابية متقدمة. بالمقارنة، حصلت المجموعات التي استخدمت الجداول الإلكترونية على درجة أقل، تصل إلى ست درجات من تسعة. ويعكس هذا مستوى أقل من تعقيد الدوال التكنولوجية المستخدمة، حيث كانت الوظائف أكثر أساسية وتقتصر على الحسابات البسيطة وعرض البيانات. أقل مستوى تعقيد: سجلت المجموعات التي استخدمت

الجداول الإلكترونية أدنى درجة في عملية التبسيط، حيث حصلت على درجة واحدة من تسعة. يشير هذا إلى أن الأدوات الرقمية كانت أقل فعالية في تبسيط وتحليل النموذج مقارنة بالجيوجبرا، حيث كانت الوظائف المستخدمة في الجداول الإلكترونية أكثر تقييدًا وأقل تطورًا (شكل 11).



شكل 11: مستوى الدوال الرقمية المستعملة في نشاط معجون الاسنان بين المجموعات في الاداتين

النقاش

هدف البحث الى فحص تكامل الأدوات الرقمية (الجيوجبرا والجداول الالكترونية) في عمليات ومراحل النمذجة خلال انخراط معلمو الرياضيات المستقبليون في نشاط نمذجة. تشير النتائج العامة أن جميع مراحل وعمليات النمذجة تم تحديدها بين جميع المجموعات (التبسيط والفهم، النموذج الواقعي، العمل الرياضي، النموذج الرياضي، التطبيق في النموذج الرياضي، النتيجة الرياضية ترجمة النتائج الرياضية إلى واقعية، النتيجة الواقعية وتقييم النتائج الواقعية)، تدعم هذه النتائج تحليل المراحل والعمليات التي اقترحها بلوم وليس (Blum &

Leiß, 2005)، والذي يعتبر تعريفًا قياسيًا لعمليات النمذجة. كما تم تأكيد ذلك أيضًا في دراسات أخرى أكثر حداثة، مثل دراسة شحبري وطباخ (Shahbari& Tabach, 2019).

تشير النتائج المتعلقة بتكامل الأدوات الرقمية في دورة النمذجة إلى ثلاثة أنماط مختلفة: أ) دمج الأدوات الرقمية في معظم دورة النمذجة، ب) دمج الأدوات الرقمية بعد إنتاج النموذج الواقعي، ج) دمج الأدوات الرقمية بعد استخراج النماذج الرياضية وتقييمها وقبولها. تدعم هذه النتائج وجود أكثر من نموذج لدمج الأدوات الرقمية، وهو ما يتماشى مع نتائج دراسة ظاهر وشحبري (Daher & Shahbari, 2015) التي فحصت مشاركة عينة مشابهة لعينة البحث الحالي. بينما اشارت أبحاث أخرى مثل غايغر (Geiger, 2011) وغريفاث (Greefrath, 2011) ان دمج الأدوات الرقمية يظهر في دورة النمذجة بأكملها. وفي بحث اخر جديد للباحثة (Shahbari, 2025) اظهر أن دمج الأدوات الرقمية ليس ثابتًا بل يتغير بناءً على معرفة المشاركين بكل من أنشطة النمذجة والأدوات التكنولوجية. حيث اظهر البحث ان بعد عدة تجارب مع أنشطة النمذجة باستخدام الأدوات الرقمية يتم دمج التكنولوجيا وفق النمط الأول الذي يظهر تكامل مع معظم دورة النمذجة. وبما ان البحث الحالي تناول فقط نشاط واحد ربما ظهرت نتائج مشابهة لنتائج ظاهر وشحبري (Daher & Shahbari, 2015). تقدم الدراسة الحالية تمثيلا بصريا يوضح دور الأدوات الرقمية في عمليات ومراحل النمذجة والفرق بين كل من الجيوجبرا والجداول الالكترونية.

تشير النتائج كذلك الى استخدامات مختلفة للدوال في الجيوجبرا: الرسم الرياضي، الإنشاء، القياس، التجريب والحساب، هذه الاستخدامات تمت الإشارة اليها في بحث سابق لغريفاث وسيلر (Greefrath & Siller, 2018). اما الاستخدامات التي ظهرت باستخدام الجداول الإلكترونية فهي عرض البيانات، إجراء حسابات بسيطة، برمجة وظائف مخصصة وتشغيل عمليات المحاكاة أو تطبيق النموذج الذي تم إنشاؤه والتي ظهرت أيضا في بحث سابق لفياريال وزملائه (Villarreal et al., 2018). اضافة الى الفرق بين الاستخدامات تشير النتائج الى فرق في درجة ومستوى استخدام الميزات لكل من الجيوجبرا والجداول الالكترونية، والتي تتراوح من

الحسابات البسيطة إلى الوظائف المعقدة المتضمنة في الأدوات مثل انشاء واستخدام دوال وهذا ما تم الإشارة اليه في أبحاث اخرى (Galbraith & Fisher, 2021). بشكل عام تم استخدام واعتماد وظائف رقمية أكثر تعقيدًا في الجيوجبرا منها في الجداول الالكترونية. على سبيل المثال، تُظهر النتائج أنه من خلال العمل الرياضي (Mathematizing)، تم حصول مجموعات الجيوجبرا على ثمانية درجات من تسعة بينما حصلت مجموعات الجداول الالكترونية على ستة درجات فقط. ممكن تفسير النتائج بالإمكانيات الديناميكية التصويرية في الجيوجبرا مثل الرسم، القياس والبناء (Greefrath & Siller, 2018).

من المهم الإشارة إلى أن المشاركة في أنشطة النمذجة تتيح الفرصة لتطوير الكفاءة في استخدام الأدوات الرقمية. يتجلى ذلك في ميزات الأنشطة التي تتضمن مشاكل مفتوحة تحتاج إلى تفسير وتحويلها إلى رياضيات من قبل المشاركين الذين يعملون في مجموعات صغيرة، مما يعزز النقاش والتواصل بينهم (Shahbari & Peled, 2017). هذه المشاكل تتطلب من المشاركين اختيار مسارات حلول متعددة واستخدام الأدوات الرقمية بكفاءة. كما تشجع أنشطة النمذجة على تعميم النماذج وبناء واستخدام وظائف متقدمة مثل النماذج الديناميكية في الجداول الالكترونية. بالإضافة إلى ذلك، تشجع على اكتشاف ميزات التحقق والمحاكاة في الأدوات الرقمية لتقييم تأثير القيم المختلفة على النتائج.

تؤكد إسقاطات الدراسة على فعالية مشاركة المعلمين المستقبليين في سلسلة من أنشطة النمذجة باستخدام الأدوات الرقمية وتعاملهم مع أدوات رقمية متنوعة، يمكن أن يعزز الانخراط في أنشطة النمذجة فهم المشاركين لوظائف الأدوات الرقمية وتطبيقها بشكل ملائم.

تمت الدراسة على عينة صغيرة من المعلمين المستقبليين فمن ناحية كانت هذه العينة هي المتاحة للباحثة ومن ناحية أخرى عملية التحليل المعمق والدقيق تصعب من إمكانية تتبع مجموعات كثيرة. الاعتماد على عينة صغيرة قد تؤثر على التنوع في دوائر النمذجة ومساراتها وبشكل خاص ان العمل تتضمن في ست مجموعات فقط من المعلمين المستقبليين. فمن الممكن ان النتائج تتعلق بالمعرفة الخاصة للمشاركين ضمن عينة البحث. هذا الامر قد يحد من تعميم

النتائج على مجتمعات أخرى من المشاركين. لذا يوصى بإجراء البحث على عينة أكبر لتعزيز موثوقية النتائج

في النهاية توصي الدراسة بإجراء دراسات جديدة تتناسب مع تطور ودمج الذكاء الاصطناعي في تعليم الرياضيات وربطه مع الواقع. توصي الدراسة ببحث دمج أدوات الذكاء الاصطناعي في التعامل مع أنشطة النمذجة. وكيف يمكن ان تؤثر أدوات الذكاء الاصطناعي على دوائر النمذجة ومساراتها المختلفة وكذلك على أنواع النماذج الرياضية التكنولوجية الناتجة. من الممكن أيضا بحث الاختلاف بين أدوات الذكاء الاصطناعي وتأثيره على كل عملية النمذجة.

المراجع

Altay, M. K., Özdemir, E. Y., & Akar, Ş. Ş. (2014). Pre-service elementary mathematics teachers' views on model eliciting activities. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116,* 345–349. https://doi: 10.1016/j.sbspro.2014.01.219

Alwast, A., & Vorhölter, K. (2022). Measuring pre-service teachers' noticing competencies within a mathematical modeling context–an analysis of an instrument. *Educational Studies in Mathematics, 109,* 263–285. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10102-8

Ang, K. C. (2021). Computational thinking and mathematical modelling. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), Mathematical modeling education in east and west (pp. 19-34). Cham: Springer International Publishing.

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modeling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications, 31*(1), 20–30. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10102-8

Blum, W. & Borromeo Ferri, R. B. (2009). Mathematical modeling: Can it be taught and learnt. *Journal of Mathematical Modeling and Application, 1*(1), 45–58.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). "Filling Up" - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modeling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics education (CERME 4)* (pp. 1623–1633). Fundemi Iqs, Universitat Ramon Llull.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86–95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Bonotto, C. (2010). Realistic mathematical modelling and problem posing. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies*: ICTMA13 (pp. 399-408). New York: Springer.

Budinski, N., & Takači, D. (2011). Introduction of the notion of differential equations by modeling based teaching. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *18*(3), 107-111.

Buchholtz, N. (2021). Modelling and mobile learning with math trails. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), Mathematical modelling education in East and West: International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling (pp. 331–340). Cham, Switzerland: Springe

Bukova-Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to construct and solve mathematical modeling problems. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, *30*(1), 19–36. https://doi.org/10.1093/teamat/hrq015

Cai, J., Cirillo, M., Pelesko, J., Ferri, R., Borba, M., Paulo, S., Geiger, V., Stillman, G., English, L., Wake, G., Kaiser, G., & Kwon, O. (2014). Mathematical modeling in school education: mathematical, cognitive, curricular, instructional, and teacher education perspectives. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 145–172). PME.

Cai, J., LaRochelle, R., Hwang, S., & Kaiser, G. (2022). Expert and preservice secondary teachers' competencies for noticing student thinking about modeling. *Educational Studies in Mathematics, 109*(2), 431–453. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10071-y

Cetinkaya, B., Kertil, M., Erbas, A. K., Korkmaz, H., Alacaci, C., & Cakiroglu, E. (2016). Pre-service teachers' developing conceptions about the nature and pedagogy of mathematical modeling in the context of a mathematical modeling course. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(4), 287–314. https://doi.10.1080/10986065.2016.1219932

Cevikbas, M., Greefrath, G., & Siller, H. S. (2023). Advantages and challenges of using digital technologies in mathematical modeling education–a descriptive systematic literature review. *Frontiers in Education, 8*, 1142556. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1142556

Daher, W., & Shahbari, J. A. (2015). Pre-service teachers' modelling processes through engagement with model eliciting activities with a technological tool. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 25-46.

English, L. D., Bergman Arleback, J., & Mousoulides, N. G. (2016). Reflections on progress in mathematical modeling research. In A. Gutierrez, G. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The Journey Continues* (pp. 383–413). Sense Publishers. https://brill.com/view/book/edcoll/9789463005616/BP000012.xml

English, L. D., & Fox, J. L. (2005). Seventh-graders' mathematical modeling on completion of a three-year program. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Eds). *Building connections: Theory, research and practice,* (vol. 1, pp. 321–328). Deakin University Press.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modeling with 9-year-olds. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (vol. 2, pp. 297-304). Melbourne: PME.

Galbraith, P., & Fisher, D. (2021). Technology and mathematical modelling: addressing challenges, opening doors. *Quadrante*, *30*(1), 198-21. https://doi.org/10.48489/quadrante.23710

Geiger, V. (2011). Factors affecting teachers' adoption of innovative practices with technology and mathematical modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling*, (v.1, pp. 305–314). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_31

Glaser, B. G. & Strauss, A. L. (1967). *Discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research.* Aldine.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. S. (2018). Mathematical modeling with digital tools—A quantitative study on mathematizing with dynamic geometry software. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, *50*(1–2), 233–244. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6

Greefrath, G., & Siller, H. S. (2018). GeoGebra as a tool in modeling processes. In L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, Siller, H. S., M. Tabach & C. Vale (Eds.), *Uses of technology in primary and secondary mathematics education* (pp. 363–374). Springer.

Greefrath, G., Siller, H. S., Klock, H., & Wess, R. (2022). Pre-service secondary teachers' pedagogical content knowledge for the teaching of mathematical

modeling. *Educational Studies in Mathematics*, *109*(2), 383–407. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10038-z

Haines, C., & Crouch, R. (2007). Mathematical modeling and applications: Ability and competence frameworks. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education*: *The 14th ICMI study* (pp. 417–424). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_46

Hoyles, C., Noss, R., Kent, P., & Bakker, A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. Routledge. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_46

Jessen, B. E., & Kjeldsen, T. H. (2023). Mathematical modeling and digital tools—and how a merger can support students' learning. In In: Jankvist, U.T., Geraniou, E. (Eds), *Mathematical competencies in the digital era*, (Vol 20, pp. 99–118). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_6

Kaiser, G. (2020). Mathematical modelling and applications in education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 553–561). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modeling in lower secondary mathematics classroom—problems and opportunities. In W. Blum, W. Henne, & M. Niss (Eds.), *Applications and modeling in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 99–108). Kluwer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_8

Kaiser, G. (2007). Modeling and modeling competencies in school. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Eds.), *Mathematical modeling: Education, engineering and economics*, ICTMA 12 (pp. 110–119). Chichester: Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.3.110

Kang, O. & Noh, J. (2012). Teaching Mathematical Modeling in School Mathematics. 12th International Congress on Mathematical Education., Seoul, Korea.

Kuntze, S., Siller, H. S., & Vogl, C. (2013). Teachers' self-perceptions of their pedagogical content knowledge related to modelling–An empirical study with Austrian teachers. In *Teaching mathematical modelling: Connecting to research and practice* (pp. 317-326). Dordrecht: Springer Netherlands.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism, models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 3–34). Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2–3), 109–129. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679996

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 38(*2), 113–142. https://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K., & Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modeling. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling*, (Vol. 1, pp. 629–639). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_60

Ortega, M. Albarracínb, L. & Puiga, L. (2019). Influence of technology on mathematical modelling of a physical phenomenon. In G. Stillman & J.

Brown, (Eds.), *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education* (pp. 161–178). Cham, Switzerland: Springer.

Schukajlow, S., Krawitz, J., Kanefke, J. *Blum, W.* Rakoczy, K. (2023). Open modeling problems: cognitive barriers and instructional prompts. *Educational Studies in Mathematics*, *114*(3), 4117-438. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10265-6

Siller, H.-S. & Greefrath, G. (2010). Mathematical modelling in class regarding to technology. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, and F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 6), (pp. 2136-2145). Lyon, France

Sriraman, B., & English, L. D. (Eds.). (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 309-331). New York: Springer.

Shahbari, J. A. (2018). Mathematics teachers' conceptions about modelling activities and its reflection on their beliefs about mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(5), 721-742.

Shahbari, J. A. (2025). Features of Digital Tools Utilized in Mathematical Modeling Process. in *International Journal of Science and Mathematics Education*. *23*, 415–439. https://doi.org/10.1007/s10763-024-10472-4

Shahbari, J. A., & Peled, I. (2016). Using modelling tasks to facilitate the development of percentages. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(3), 259-272

Shahbari, J. A, & Tabach, M. (2016). Developing modelling lenses among practicing teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(5), 717-732.

Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2021). Development of modelling routines while working on model-eliciting activities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-19.

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., & Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modeling in the secondary classroom. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th mathematics education research group of Australasia conference mathematics: Essential research, essential practice, (*Vol.2, pp. 688707). MERGA. http://www.merga.net.au/documents/RP642007.pdf

Villarreal, M. E., Esteley, C. B., & Smith, S. (2018). Pre-service teachers' experiences within modeling scenarios enriched by digital technologies. *ZDM—the International Journal on Mathematics Education, 50*(1–2), 327–341. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0925-5

Villamizar, F., Martínez, A., Cuevas, C., & Espinosa-Castro, J. (2020). Mathematical modeling with digital technological tools for interpretation of contextual situations. *Journal of Physics: Conference Series, 1514*(1), 1–6. https://doi 10.1088/1742-6596/1514/1/012003

Weber, K., & Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. In A. Gutiérrez, P. Boero, & G. Leder (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353–382). Sense. https://doi.org/10.1007/9789463005616_011

Yu, S. Y., & Chang, K. C. (2009). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modeling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri & G. Stillman. (Eds.), Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modeling: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modeling (pp. 147-156). University of Hamburg, Hamburg.